



CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-62

生命保険会社におけるアセット・アロケーションの頑健最適化問題に対する
近似解析解

バトボルド ボロルソフタ・菊池健太郎・楠田浩二

2018年3月

**Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY**

**1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN**

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

生命保険会社におけるアセット・アロケーションの頑健最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ* 菊池 健太郎 楠田 浩二†
滋賀大学大学院博士後期課程 滋賀大学 滋賀大学

和文概要 世界金融危機以降、金融機関では、確率過程自体を特定出来ない「ナイトの不確実性」下での投資の頑健化に対する認識が高まっている。楠田・菊池 [8] は、ナイトの不確実性下、「相似拡大的頑健効用」(Maenhout [10]) を持つ投資家の株式指数と全満期の国債を投資対象とする消費と長期証券投資の最適化問題において、アフィン2ファクター証券市場モデルを仮定し、HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式に現れる非斉次項をCampbell and Viceira [3], 楠田 [6] の対数線形近似法で近似して解析解を導出している。楠田 [7] は、生命保険会社の生保販売を証券の空売り投資と見做し、生保債務をポートフォリオに組み込む新たなアプローチにより、生保頑健運用問題を楠田・菊池 [8] の問題枠組みの中に位置付け、近似解析解を与えている。しかし、同モデルの実証分析結果(久保・楠田 [5]) はアフィン2ファクター証券市場モデルが株式指数と全満期の国債の価格過程を近似し得ないことを明らかにしている。本稿では、証券市場モデルを一般次元のアフィン潜在ファクター証券市場モデルに一般化し、投資対象を非債券の主要指数全般と全満期の国債に拡大した、消費と長期証券投資の頑健最適化問題に近似解析解を与えているバトボルド・菊池・楠田 [2] を応用して、生保の頑健運用問題に対する近似解析解を導出する。

キーワード: 確率制御, 頑健効用, 近似解析解, 生命保険, 潜在ファクター, ナイトの不確実性

1. 序論

世界金融危機では、金融工学等に基づく先進的リスク管理技術を有していると評価されてきた欧米の一流の金融機関の少なからずが世界金融危機において想定外の莫大な損失を被ったとみられている。これは彼等が過去の統計データに基づく推定により想定した「標準確率」よりも現実の確率が大きく下振れしていたことに加え、こうした「ナイトの不確実性」(Knight [9]) 下の「モデル・リスク(下振れリスク)」を想定した投資決定・リスク管理が機能不全に陥っていたことを意味している。このことは金融機関等の投資家が標準確率に全面的に依拠出来ないナイトの不確実性下で下振れリスクに対し頑健な投資決定・リスク管理等を行う必要があることを改めて強く示唆している。

本稿では、生命保険会社のアセット・アロケーションの頑健最適化問題を考察する。生命保険会社は、短期から超長期までの異なる満期と異なる予定利率から構成される複雑な期間構造を有する債務を抱えているため、イールド・カーブの変化に応じて生命保険会社の時価債務は時々刻々変動している。勿論、短期から超長期までの国債購入によるデュレーション・マッチングを行えば保険債務の確実な履行は出来るが、このとき、運用収益率は大幅に低下し、予定利率の低下や役職員給与の引下げを余儀なくされよう。しかし、運用収益率の向上を企図して株式・外国国債等のリスクの高い証券の投資比率を高めれば、保険債務の確実な履行のためのリスク管理が困難となる。

楠田・菊池 [8] は、ナイトの不確実性下、「相似拡大的頑健効用」(Maenhout [10]) を持つ投資家の株式指数と全満期の国債を投資対象とする消費と長期証券投資の最適化問題におい

*連絡先 bolorsuvd@biwako.shiga-u.ac.jp

†本研究はJSPS 科研費 26380392 の助成を受けたものである。

て、短期金利と平均短期金利を状態変数とするアフィン2ファクター証券市場モデルを仮定し、HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式に現れる非斉次項を Campbell and Viceira [3], 楠田 [6] の対数線形近似法で近似して解析解を導出している。

楠田 [7] は生命保険会社の生保販売を証券の空売り投資と見做し、生保債務をポートフォリオに組み込む新たなアプローチにより、生保頑健運用問題を楠田・菊池 [8] の消費と長期証券投資の最適化問題の枠組みの中に位置付け、近似解析解を与えている。しかし、同モデルの実証分析結果（久保・楠田 [5]）は、アフィン2ファクター証券市場モデルが株式指数と全満期の国債の価格過程を近似し得ないことを明らかにしている。

本稿では、証券市場モデルを一般次元のアフィン潜在ファクター証券市場モデルに一般化し、投資対象を非債券の主要指数全般と全満期の国債に拡大した、消費と長期証券投資の頑健最適化問題に近似解析解を与えているバトボルド・菊池・楠田 [2] を応用して、生保の頑健運用問題に対する近似解析解を導出する。

本稿の次章以降の構成は次の通りである。2章では、アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介し、3章では生保頑健運用モデルを説明する。4章では、生保頑健運用問題の近似解析解を導出し、近似最適投資比率を示す。5章で、今後の課題を述べる。

2. アフィン潜在ファクター証券市場モデル

本章では、バトボルド他 [1] のアフィン潜在ファクター証券市場モデルを市場環境、同環境の下での証券の無裁定価格の確率過程の順に説明する。

2.1. 市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。投資家共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデル化されている。ここで、 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ は N 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである。確率測度 P の下での期待値作用素を E と表記する。市場では、安全証券（以下、「短期安全証券」と呼ぶ）、「中長期安全証券」としての満期までの期間が最長 $\bar{\tau}$ 、額面1円、任意の満期の信用リスクの無い割引債（以下、「割引国債」と呼ぶ）¹、 J 種類の非債券の主要指数（株式指数、REIT 指数、商品指数等）が任意の時点で市場で取引されている。短期安全証券の価格を P 円、満期 T の割引債の価格を P^T 円、非債券の主要指数の配当込みの価格を S^j 円と表記する。ここで、 $P_0 = 1$ 円である。

本稿では、一般性の高い、アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定する。

仮定 1. N 次元潜在ファクター X_t は次の確率過程に従う。

$$dX_t = K(\theta - X_t) dt + \Sigma dP_t, \quad (2.1)$$

ここで、 θ は N 次元定数ベクトル、 K, Σ は $N \times N$ 定数行列である。また、 K は次のように対角化可能な正値対称行列である。

$$L = Q^{-1} K Q = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N \end{pmatrix},$$

¹厳密には、物価連動債が中長期安全証券であるが、我が国等の先進諸国では、直近20年間以上、物価安定が継続しているほか、物価連動債は流通量が限定的で、投資対象として組み入れ難いことから、本稿では、国債を近似的に「中長期安全証券」と見做している。

ここで, $l_1, l_2, \dots, l_N > 0$ であることに留意.

国債(金利の期間構造)については, 状態変数 X_t のアフィン・モデル (Duffie and Kan [4]) を仮定し, 非債券の主要指数については, Mamaysky [11] の提案したアフィン型モデルにおいて非定常項を捨象したモデルを仮定する.

仮定 2. 1. リスクの市場価格 Λ_t , 瞬間的スポット・レート r_t は, 潜在ファクター X_t のアフィン関数である.

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda X_t, \quad (2.2)$$

$$r_t = r_0 + r' X_t, \quad (2.3)$$

ここで, $K + \Sigma\Lambda$ は正則である.

2. 非債券の主要指数の配当過程 D_t^j は潜在ファクター X_t の次式で表される関数である.

$$D_t^j = (d_{j0} + d'_j X_t) \exp(P_{j0} t + b'_j X_t). \quad (2.4)$$

2.2. 証券価格過程

以下では, 時点 t における割引国債の満期 T までの期間を $\tau = T - t$ と表記する.

補題 1. 仮定 1・2 の下, 証券価格過程は次を満たしている.

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t dt, \quad P_0 = 1. \quad (2.5)$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = (r_t + b'(\tau)\Sigma\Lambda_t) dt + b'(\tau)\Sigma dB_t, \quad P_T^T = 1, \quad (2.6)$$

ここで, $b(\tau)$ は次の非斉次の定数係数線形連立常微分方程式の解である.

$$\frac{db(\tau)}{d\tau} = -(K + \Sigma\Lambda)'b(\tau) - r, \quad b(0) = 0. \quad (2.7)$$

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = (r_t + b'_j \Sigma \Lambda_t) dt + b'_j \Sigma dP_t, \quad (2.8)$$

ここで,

$$P_j = -(K + \Sigma\Lambda)^{-1}(r - d_j). \quad (2.9)$$

証明. バトボルド他 [1] の補論 A.1 参照. □

3. 生保頑健運用モデル

本章では, 生命保険会社の生命保険販売を証券の空売り投資と見做し, 生命保険債務を生命保険会社のポートフォリオに組み込んだ楠田 [7] の生保頑健運用モデルについて説明する.

3.1. 生命保険会社のモデル化

生命保険会社は一般に死亡保険，生存保険，生死混合保険，医療保険等を販売している。我が国では，医療保険等の積立金額・運用残高は小さいので，生命保険会社の生命保険運用問題を考察する本稿では，死亡保険，生存保険，生死混合保険の3種の生命保険を対象とすれば十分である。また，生死混合保険は死亡保険と生存保険の混合保険なので，畢竟，生命保険会社のこれら3種の生命保険の販売に基づく保険料収入と解約返戻金・保険金等債務は生死混合保険で代表される。そこで本稿では，生死混合保険の代表的商品である養老保険を対象とする。尚，生死混合保険における死亡保険部分の積立金額・運用残高は小さいので，本稿の生命保険会社の運用モデル構築に際しては，生死混合保険における生存保険部分を中心に抽象化作業を行うことを予め留意されたい。

今，相互会社形態の生命保険会社（以下，「生保」）が一定年齢を満期とする契約期間 τ 年，満期保険金が一口1円の一時的養老保険を販売している。当該養老保険の予定利率，解約時の解約返戻金，死亡時の保険金については，次の仮定を置く。

仮定 3. 1. 生保は当該養老保険の保険料を予定利率（連続複利ベース）が満期までの期間 τ の国債の利率から一定率 κ_1 （同）引き下げた利率となるように設定して販売している。すなわち，時点 t における当該養老保険の保険料は一口 $\exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau}$ 円に設定されている。

2. 契約者が時点 t で満期までの期間 τ の養老保険を解約した場合，一口当り $\exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau}$ 円の解約返戻金が支払われる。

3. 被保険者が時点 t に満期までの期間 τ を残して死亡した場合は，受取人に満期保険金（一口当り1円）が支払われる。

被保険者が時点 t に満期までの期間 τ を残して死亡した場合に受取人に支払われる一口当りの満期保険金1円は養老保険における生存保険金（解約）価値 $\exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau}$ 円と死亡保険金価値 $(1 - \exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau})$ 円の合計金額と解釈出来る。先ず，後者の死亡保険金支払いを除いた養老保険を考察する。このとき，生保は満期までの期間 τ の養老保険の各時点 t における販売と解約返戻金・保険金支払いを通じて市場価値

$$Q_t^{t+\tau} = \exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau} \quad (3.1)$$

円の証券を売買していると見做せる。すなわち，生保の当該養老保険販売は一口当り $\exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau}$ 円の当該証券を空売りしており，当該養老保険解約時返戻金・死亡時保険金 $\exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau}$ の支払いは当該証券の市場価値での買戻しと見做せる。そこで以下では，当該養老保険を当該生命保険会社のみが空売り出来，契約者・受取人のみが当該生保に解約時・死亡時に随時買戻しを請求出来る特殊な店頭売買証券に見立てる。

このとき，満期 T の生命保険証券の市場価格 Q^T について，(3.1)式を微分し，(2.6)式を用いると，次の確率微分方程式が得られる。

$$\frac{dQ_t^T}{Q_t^T} = (r_t + \Sigma\Lambda_t - \kappa_1) dt + \Sigma dB_t. \quad (3.2)$$

当該養老保険を証券に見立てると，生保は当該養老保険の販売と解約返戻金・保険金支払いを通じて，満期までの期間 $[0, \tau]$ の養老保険証券群の空売りポートフォリオを組成していると見做せる。

満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の養老保険の時点 t における富 W_t に対する保険債務比率（空売り投資比率）を $\pi_t(\tau)d\tau$ と表記する．すなわち， $\pi_t(\tau)$ は保険債務比率密度過程を表している．保険債務比率密度過程は，分母の富の成長率，分子の保険債務残高を減少させる死亡率と解約率に依存する．富の成長率，死亡率，解約率は，状態変数と満期までの期間に依存すると考えられるので，次のように仮定する．

仮定 4. 保険債務比率密度過程 $\pi_t(\tau)$ は次式に従う．

$$\pi_t(\tau) = \pi_0(\tau) + \pi(\tau)'X_t, \quad (3.3)$$

ここで， π_0, π は区間 $[0, \bar{\tau}]$ において原始関数の存在する可積分関数である．

各期 $[t, t + dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の死亡保険金支払い総額を考察するため，当該死亡保険金の契約口数を $\zeta_t(\tau)d\tau dt$ と表記する．被保険者の死亡率は一般に年齢の増加関数とされているので，満期までの期間の或る減少関数 $\varepsilon_1(\tau)$ で表されると仮定する．このとき，各期 $[t, t + dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の死亡保険金支払い総額は $\varepsilon_1(\tau)\zeta_t(\tau)(1 - P_t^{t+\tau})d\tau dt$ と表される．これは次のように書き換えられる．

$$\varepsilon_1(\tau)\zeta_t(\tau)(1 - P_t^{t+\tau})d\tau dt = \varepsilon_1(\tau) \left(\frac{1}{P_t^{t+\tau}} - 1 \right) \pi_t(\tau)W_t d\tau dt.$$

上式右辺の $(1/P_t^{t+\tau} - 1)$ は状態変数の関数であり，且つ満期までの期間の増加関数である．死亡保険の積立金額・運用残高は生存保険に比べて著しく小さく，積立金額・運用残高全体に対する占率が著しく小さいことを考慮し，状態変数の変動を無視するほか，満期までの期間 τ の影響については， τ の増加関数 $\varepsilon_1(\tau)$ の影響と相殺すると見做し，次式が成り立っていると仮定する．

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\tau) \left(\frac{1}{P_t^{t+\tau}} - 1 \right),$$

ここで， ε_1 は正の定数である．

また，保険の販売，積立金の運用・管理等に係る役職員給与を除く諸経費は運用残高に比例すると仮定する．以上の考察より，次の仮定を設ける．

仮定 5. 1. 各期 $[t, t + dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の死亡保険金（生存保険価値除く）の支払い総額は $\varepsilon_1\pi_t(\tau)W_t d\tau dt$ である．

2. 各期 $[t, t + dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の保険積立金の運用・管理等に係る役職員給与を除く経費は $\varepsilon_2\pi_t(\tau)W_t d\tau dt$ である．ここで， ε_2 は正の定数．

以下では，富に対する全保険債務比率を Π_t とそれぞれ略記する．すなわち，

$$\Pi_t = \int_0^{\bar{\tau}} \pi_t(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

仮定 4 の下， Π_t は次式を満たしている．

$$\Pi_t = \Pi_0 + \Pi'X_t, \quad (3.5)$$

ここで，

$$\Pi_0 = \int_0^{\bar{\tau}} \pi_0(\tau) d\tau, \quad \Pi = \int_0^{\bar{\tau}} \pi(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

3.2. 生保頑健運用問題

非債券の主要指数の富に対する投資比率を Φ_t^j と表記する。また、割引国債については、任意の満期の割引国債を投資対象としているため、富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる。そこで、割引国債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$ と表記する²。以下では、次の記法を用いる。

$$\Psi_t = \left\{ \int_0^{\bar{\tau}} (\varphi_t(\tau) - \pi_t(\tau)) b(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^J \Phi_t^j b_j \right\}' \Sigma. \quad (3.7)$$

以下、 Ψ_t を適宜「投資」と略称する。

以上より、生保の予算制約式が導かれる。

補題 2. 仮定 1-5 の下、富過程 W は次の予算制約式を満たす。

$$dW_t = \{W_t(r_t + \kappa\Pi_t + \Psi_t\Lambda_t) - c_t\} dt + W_t\Psi_t dB_t, \quad (3.8)$$

ここで、 $\kappa = \kappa_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ 。

証明. 補論 A.1 参照. □

生保の頑健効用について説明する。ナイトの不確実性下、生保は最も有り得べき確率測度 P 以外の確率測度の候補として、全ての「等価確率測度」³ の集合 \mathbb{P} を想定する。そして、生保は各計画に対し最悪の場合の等価確率測度を想定して、 \mathbb{P} 上で「期待効用汎関数」を最小化する等価確率測度（以下、「最悪確率」と呼ぶ）を求める。この際、参考確率 P を尤も有り得べき確率と認識している以上、参考確率 P と大幅に乖離する最悪確率を想定することは慎重を通り越して杞憂の誇りを免れない。そこで、通常の期待効用に参考確率 P との乖離に損失を与える項を付加することにより合理的な最悪確率を決定する「相似拡大的頑健効用」を仮定する。

仮定 6. 生保は各期 $[t, t + dt]$ の基礎的利益 $c_t dt$ に基づく、次式で表される相似拡大的頑健効用の最大化を企図する。

$$U(c) = \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} E^\xi \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \left\{ \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_t^\xi(c)}{2\delta} \xi_t' \xi_t \right\} dt \right], \quad (3.9)$$

ここで、 γ は相対的危険回避度、 δ は曖昧性回避度（以下、「相対的曖昧性回避度」と呼ぶ）を表す正の定数、 U_t^ξ は次式で再帰的に定義される効用過程である。

$$U_t^\xi(c) = E_t^\xi \left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)} \left\{ \frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_s^\xi(c)}{2\delta} \xi_s' \xi_s \right\} ds \right]. \quad (3.10)$$

予算制約式 (3.8) は、富過程が $u = (c, \Psi)$ で決定されることを示しており、生保の効用最大化問題における制御変数は $u = (c, \Psi)$ であることが分かる。状態変数を $Z' = (W, X')$ と表記する。また、予算制約式 (3.8) を満たす制御変数 $u = (c, \Psi)$ を初期状態 $Z'_0 = (W_0, X'_0)$

²尚、このとき、或る特定の満期の割引国債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため、許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする。

³ここで、 \tilde{P} が P の等価確率測度とは、両測度の零集合が一致している場合 ($P(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A) = 0$) を言う。

に対する許容的制御と呼び、許容的制御の集合を $\mathcal{B}(Z_0)$ と表記する。このとき、生保頑健運用問題及び値関数 $V(Z_0)$ が次式で定義される。

$$V(Z_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(Z_0)} \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} E^\xi \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \left\{ \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)V(Z_t)}{2\delta} \xi_t' \xi_t \right\} dt \right]. \quad (3.11)$$

4. 生保頑健運用問題の近似解析解

本章では、生保頑健運用問題における最適投資の近似解析解を導出する。

4.1. 最悪確率の決定

最悪確率候補としての等価確率測度 P^ξ の下での標準ブラウン運動 B_t^ξ は、

$$B_t^\xi = B_t - \int_0^t \xi_s ds,$$

と表されるので、等価確率測度 P^ξ の下での状態変数に関する確率微分方程式は次のように書き改められる。

$$dZ_t = \left(\begin{pmatrix} W_t(r_t + \kappa\Pi_t + \Psi_t\Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_t\pi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} \xi_t \right) dt + \begin{pmatrix} W_t\pi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} dB_t^\xi. \quad (4.1)$$

従って、相似拡大的頑健効用における最適化の必要条件である HJB 方程式は次式のように表される。

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(Z_0)} \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} \left\{ \begin{pmatrix} W_t(r_t + \kappa\Pi_t + \Psi_t\Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix} \right] \right. \\ \left. - \beta V + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)V}{2\delta} \xi_t' \xi_t + \xi_t' \begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} \right\} = 0, \quad (4.2)$$

$$\text{s.t. } \lim_{T \rightarrow \infty} E[e^{-\beta T} V(Z_T)] = 0.$$

HJB 方程式 (4.2) における ξ に関する最小化条件より、最悪確率測度 P^{ξ^*} が次のように求められる。

$$\xi_t^* = -\frac{\delta}{(1-\gamma)V} \begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

最悪確率測度 P^{ξ^*} を HJB 方程式 (4.2) に代入すると、次式を得る。

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(Z_0)} \left[\begin{pmatrix} W_t(r_t + \kappa\Pi_t + \Psi_t\Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix} \right] \right. \\ \left. - \beta V + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (4.4)$$

4.2. 最悪確率下の効用最大化

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解 $u^* = (c^*, \phi^*)$ は次式を満たしている。

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (4.5)$$

$$\Psi_t^* = \frac{\hat{\Psi}_t}{W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right)}, \quad (4.6)$$

ここで,

$$\hat{\Psi}_t = W_t \left\{ -V_W \Lambda_t' + \left(\frac{\delta V_W}{(1-\gamma)V} V_X' - V_{WX} \right) \Sigma \right\}. \quad (4.7)$$

最適基礎利益 (4.5) 式と最適投資 (4.6) 式を HJB 方程式 (4.4) に代入して得られる偏微分方程式から値関数は X_t の未知関数 $G(X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される。

$$V(Z_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} (G(X_t))^\gamma. \quad (4.8)$$

値関数 V に偏微分を施し, 上記偏微分方程式に代入すると, 次の命題を得る。

命題 1. 仮定 1-6 の下, 本問題 (3.11) の最適基礎利益, 最適投資は, それぞれ (4.9) 式, (4.10) 式を満たしており, 値関数 V を構成する未知関数 $G(X_t)$ は 2 階の偏微分方程式 (4.11) の解である。

$$c_t^* = \frac{W_t}{G(X_t)}, \quad (4.9)$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma + \delta} \Lambda_t' + \frac{\gamma(\gamma + \delta - 1)}{(\gamma - 1)(\gamma + \delta)} \frac{G_X'(X_t)}{G(X_t)} \Sigma_X, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] + \frac{\delta}{2(\gamma - 1)(\gamma + \delta)} \left(\text{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \frac{G_X'}{G} \right] \right) \\ & + \left\{ K(\theta - X_t) + \frac{\gamma + \delta - 1}{\gamma + \delta} \Lambda_t' \Sigma \right\} \frac{G_X}{G} + \frac{1}{G} - \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma(\gamma + \delta)} \Lambda_t' \Lambda_t + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (r_t + \kappa \Pi_t) + \frac{\beta}{\gamma} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

証明. 補論 A.2 参照. □

4.3. 偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

偏微分方程式 (4.11) は非斉次項 $1/G$ を含んでおり, 解析解の導出を困難にしている. Campbell and Viceira [3] はすなわち, (4.9) 式より, $1/G(X_t)$ が消費・富比率 c_t^*/W_t と等しく, 同比率が安定的であることに着目し, $1/G(X_t)$ を $E[\log(c_t^*/W_t)]$ の周りで対数線形近似している. しかし, この場合, $E[\log(c_t^*/W_t)]$ は時間変数に依存する. そこで, 楠田 [6] は一定値をとる $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\log(c_t/W_t)]$ の周りで対数線形近似を行っている. 本稿もこれに従って非斉次項を次のように対数線形近似する.

$$\frac{1}{G(X_t)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t), \quad (4.12)$$

ここで,

$$g_0 = g_1(1 - \log g_1), \quad (4.13)$$

$$g_1 = \exp\left(\lim_{t \rightarrow \infty} E\left[\log\left(\frac{c_t^*}{W_t}\right)\right]\right). \quad (4.14)$$

偏微分方程式 (4.11) における非斉次項 $1/G$ を (4.12) 式で近似し, Λ_t , r_t に, それぞれ (2.2) 式, (2.3) 式を代入すると, 次の近似偏微分方程式を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \left(\operatorname{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \frac{G'_X}{G} \right] \right) \\ & + \left\{ K(\theta - X_t) - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta} \Sigma(\lambda + \Lambda X_t) \right\}' \frac{G_X}{G} - g_1 \log G \\ & + g_0 - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)} (\lambda + \Lambda X_t)' (\lambda + \Lambda X_t) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \{r_0 + \kappa \Pi_0 + (r + \kappa \Pi)' X_t\} - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

近似偏微分方程式 (4.15) の解が次式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される.

$$G(X_t) = \exp\left(a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t\right). \quad (4.16)$$

このとき,

$$g_1 = \exp\left(-\lim_{t \rightarrow \infty} E[\log G(X_t)]\right) = \exp\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left[-a_0 - a' E[X_t] - \frac{1}{2} E[X_t' A X_t]\right]\right), \quad (4.17)$$

については, 次の補題が示される.

補題 3. 仮定 1-6 の下, g_1 は (a_0, a, A) により次式で表される.

$$g_1 = \exp\left(-a_0 - a'\theta - \frac{1}{2} (\theta' A \theta + \operatorname{tr} [(Q^{-1} \Sigma)' M Q^{-1} \Sigma])\right), \quad (4.18)$$

ここで, 行列 P の第 (i, j) 成分を P_{ij} と表記すると,

$$M_{ij} = \frac{1}{l_i + l_j} (Q' A Q)_{ij}.$$

証明. バトボルド他 [2] の補題 3 の証明参照. □

4.4. 近似解析解

値関数を構成する未知関数 $G(X_t)$ が近似偏微分方程式 (4.15) の解として近似されている場合の値関数, 最適基礎利益, 最適投資をそれぞれ「近似値関数」, 「近似最適基礎利益」, 「近似最適投資」と呼び, それぞれ \tilde{V} , \tilde{c}^* , $\tilde{\psi}^*$ と表記する. このとき, 次の命題を得る.

命題 2. 仮定 1-6 の下, 本問題 (3.11) の近似値関数, 近似最適基礎利益, 近似最適投資は次を満たしている.

$$\tilde{V}(Z_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp\left[\gamma \left(a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t\right)\right], \quad (4.19)$$

$$\tilde{c}_t^* = W_t \exp\left[-\left(a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t\right)\right], \quad (4.20)$$

$$\tilde{\psi}_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta} (\lambda + \Lambda X_t)' + \frac{\gamma(\gamma+\delta)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)} (a + A X_t)' \Sigma, \quad (4.21)$$

ここで, (a_0, a, A) は連立方程式 (4.22)-(4.24) の解である.

$$\frac{1}{2}A'\Sigma\Sigma'A + \frac{\delta}{8(\gamma-1)(\gamma+\delta)}(A+A')\Sigma\Sigma'(A+A') - \left(K' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'\Sigma'\right)A - \frac{1}{2}g_1A - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\Lambda = 0, \quad (4.22)$$

$$A'\Sigma\Sigma'a + A'K\theta - K'a - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}(A'\Sigma\lambda + \Lambda'\Sigma'a) - g_1a - \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r + \kappa\Pi) = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{2}a'\Sigma\Sigma'a + \frac{1}{2}\text{tr}[\Sigma\Sigma'A] + \left\{K\theta - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma\lambda\right\}'a + g_1(1 - a_0 - \log g_1) - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + \kappa\Pi_0) - \frac{\beta}{\gamma} = 0, \quad (4.24)$$

ここで, g_1 は (4.18) 式で表されている.

証明. 補論 A.3 参照. □

4.5. 近似最適投資比率の代表的具体例

標準ブラウン運動が N 次元で, 非債券の主要指数が J 種類なので, 割引国債については, $I (= N - J)$ 群の投資対象を設定することにより, 最適投資を決定出来る. 次に, 代表的な 2 例を示す.

例 1. 投資家が割引国債の満期までの期間を I 群に区分し, 各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を採用する場合を考察する. 説明の便宜上, $\tau_0 = 0$, $\tau_I = \bar{\tau}$ と表記し, 割引国債の満期までの期間を $(\tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \dots, (\tau_{I-1}, \tau_I]$ に区分する. また, 投資比率密度過程を $(\varphi_{1t}^1, \varphi_{1t}^2, \dots, \varphi_{1t}^I)$ とするほか, 次のように記法を定める.

$$\Phi_{1t} = \begin{pmatrix} \Phi_{1t}^P \\ \Phi_{1t}^S \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^P \\ B_1^S \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

ここで,

$$\Phi_{1t}^P = \begin{pmatrix} \varphi_{1t}^1(\tau_1 - \tau_0) \\ \varphi_{1t}^2(\tau_2 - \tau_1) \\ \vdots \\ \varphi_{1t}^I(\tau_I - \tau_{I-1}) \end{pmatrix}, \quad \Phi_{1t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_{1t}^1 \\ \Phi_{1t}^2 \\ \vdots \\ \Phi_{1t}^J \end{pmatrix}, \quad B_1^P = \begin{pmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} b'(\tau)d\tau \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} b'(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I} b'(\tau)d\tau \end{pmatrix}, \quad B_1^S = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_J \end{pmatrix}.$$

このとき, (3.7)(4.21) 両式より, 「危険証券」(非短期安全証券) への近似最適投資比率 $\tilde{\Phi}_{1t}^*$ は次式で表される.

$$\tilde{\Phi}_{1t}^* = \frac{1}{\gamma+\delta}(\Sigma'B_1)^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}B_1^{-1}(a + AX_t) + B_1^{-1} \int_0^{\bar{\tau}} \{\pi_0(\tau) + \pi'(\tau)X_t\}b(\tau)d\tau. \quad (4.26)$$

尚, 短期安全証券への近似最適投資比率は,

$$1 + \Pi_t - \sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}_{1t}^{*n},$$

である.

例 2. 投資家は I 種類の一定満期の割引国債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する. 投資対象国債の満期を $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_I \leq \bar{\tau}$ とし, 各満期の国債への投資比率を $\Phi_2^{P1}, \Phi_2^{P2}, \dots, \Phi_2^{PI}$ とする. 次のように記法を定める.

$$\Phi_{2t} = \begin{pmatrix} \Phi_{2t}^P \\ \Phi_{2t}^S \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_2^P \\ B_2^S \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

ここで,

$$\Phi_{2t}^P = \begin{pmatrix} \Phi_{2t}^{P1} \\ \Phi_{2t}^{P2} \\ \vdots \\ \Phi_{2t}^{PI} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_{2t}^{S1} \\ \Phi_{2t}^{S2} \\ \vdots \\ \Phi_{2t}^{SJ} \end{pmatrix}, \quad B_2^P = \begin{pmatrix} b'(\tau_1) \\ b'(\tau_2) \\ \vdots \\ b'(\tau_I) \end{pmatrix}, \quad B_2^S = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_J \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

このとき, (3.7)(4.21) 両式より, 「危険証券」(非短期安全証券) への近似最適投資比率 $\tilde{\Phi}_{2t}^*$ は次式で表される.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{2t}^* = \frac{1}{\gamma + \delta} (\Sigma' B_2)^{-1} (\lambda + \Lambda X_t) + \frac{\gamma(\gamma + \delta - 1)}{(\gamma - 1)(\gamma + \delta)} B_2^{-1} (a + A X_t) \\ + B_2^{-1} \int_0^{\bar{\tau}} \{ \pi_0(\tau) + \pi'(\tau) X_t \} b(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.29)$$

尚, 短期安全証券への近似最適投資比率は,

$$1 + \Pi_t - \sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}_{2t}^{*n},$$

である.

留意点 1. 本稿の結果をナイトの不確実性を考慮しない場合の結果と比較するため, *CRRA* (*Constant Relative Risk Aversion*) 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対し近似解析解を導出しているバトボルド他 [1] を生保頑健運用問題に応用した場合に得られる危険証券への近似最適投資比率は, 本稿問題における $\delta = 0$ の場合であり, 上記例 2 では次式となる.

$$\tilde{\Phi}_{2t}^*|_{\delta=0} = \frac{1}{\gamma} (\Sigma' B_2)^{-1} (\lambda + \Lambda X_t) + B_2^{-1} (a + A X_t) + B_2^{-1} \int_0^{\bar{\tau}} (\pi_0(\tau) + \pi'(\tau) X_t) b(\tau) d\tau. \quad (4.30)$$

上式では, 第 1 項の近視眼的動機に基づく需要項は明示的に相対的危険回避度に反比例し, 第 2 項の保険的動機に基づく需要項には相対的危険回避度は明示的には現れていない (但し, (a, A) に陰伏的に含まれていることに留意せよ). 翻って, 本稿における危険証券への近似最適投資比率 (4.29) 式では, 近視眼的動機に基づく需要項は相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和に反比例し, 保険的動機に基づく需要項にも明示的に両回避度が現れている.

5. 今後の課題

近似値関数を構成する係数体系 (a_0, a, A) に関する連立方程式 (4.22)-(4.24) は一般に解が複数存在するので、これら複数の解は本問題の最適解の候補に過ぎない。例えば、Campbell and Viceira [3] が推測した解は、連立方程式 (4.22)-(4.24) において $A = 0$ とした場合に導出される解に対応する。すなわち、本稿で示された高次の一般解における低次の候補解に過ぎないのである。これら複数の候補解から最適解を識別する必要がある。実用的には、想定される状態変数空間の領域内の幾つかの状態変数 Z_0 に対し、値関数 $\tilde{V}(Z_0)$ の数値の大小関係を比較すれば識別出来るのかもしれない。しかし、本稿では値関数が近似関数に過ぎず、算出される値関数の数値には近似誤差も含まれるため、大小関係が微差といった場合は最適解を識別出来たのか、不安を払拭し難い。

こうした観点から、バトボルド他 [1] では、Maslowski and Veverka [12] の理論を援用して、上記複数候補解から最適解を識別するための十分条件を与えた。Maslowski and Veverka [12] では、通常の方法を対象としており、本稿のような最小・最大化問題に適用することは出来ない。本稿の問題に対しても、最適解の十分条件を提示することは今後の課題である。

参考文献

- [1] バトボルドボロソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-60, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018).
- [2] バトボルドボロソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-61, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018).
- [3] J. Campbell, and L. Viceira: *Strategic Asset Allocation* (Oxford University Press, Oxford, NY, 2002).
- [4] D. Duffie, and R. Kan: A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, **6** (2002), 379-406.
- [5] 久保英也・楠田浩二: 現代ポートフォリオ理論を用いた生保の最適資産ポートフォリオの提案. 保険学雑誌, **631** (2015), 33-63.
- [6] 楠田浩二: 消費と債券投資の多期間最適化問題における高次の近似解析解. Discussion paper J-35, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2013).
- [7] 楠田浩二: 相似拡大的頑健効用と2ファクター・ハル・ホワイト型本質的アフィン証券市場モデルに基づく生命保険の多期間最適運用問題に対する近似解析解. Discussion paper J-51, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2014).
- [8] 楠田浩二・菊池健太郎: 相似拡大的頑健効用と2ファクター本質的アフィン・モデルに基づく消費と株式・全満期国債投資の多期間最適化問題における近似解析解. Discussion paper J-50, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2014).
- [9] F. Knight: *Risk, Uncertainty, and Profit* (Boston: Houghton Mifflin, 1921).
- [10] J. Maenhout: Robust portfolio rules and asset pricing. *The Review of Financial Studies*, **17** (2004), 951-984.
- [11] H. Mamaysky: A model for pricing stocks and bonds. Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management (2002).

[12] B. Maslowski, and P. Veverka: Sufficient stochastic maximum principle for discounted control problem. *Applied Mathematics and Optimization*, **70** (2014), 225-252.

A. 証明

A.1. 補題 2 の証明

時点 t における満期までの期間 τ の割引国債価格を $P_t(\tau)$, 満期までの期間 τ の養老保険価格を $Q_t(\tau)$ と表記する. 短期安全証券, 割引国債, 主要指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta^P, (\vartheta^P(\tau)), (\vartheta^i))$ とし, 養老保険の契約口数を $(\vartheta^Q(\tau))$ とすると, 次式が成り立つ.

$$W_t = \vartheta_t^P P_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t^P(\tau) P_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^J \vartheta_t^i S_t^j - \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t^Q(\tau) Q_t(\tau) d\tau.$$

このとき, 自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^i))$ は, 次式を満たしている.

$$\begin{aligned} dW_t &= \vartheta_t^P dP_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t^P(\tau) dP_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^J \vartheta_t^i dS_t^j - \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t^Q(\tau) dQ_t(\tau) d\tau \\ &\quad - \left\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Pi_t W_t + c_t \right\} dt \\ &= W_t \left\{ \left(1 - \int_0^{\bar{\tau}} (\varphi_t(\tau) - \pi_t(\tau)) d\tau - \sum_{j=1}^J \Phi_t^j \right) \frac{dP_t}{P_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\bar{\tau}} \pi_t(\tau) \frac{dQ_t(\tau)}{Q_t(\tau)} d\tau + \sum_{j=1}^J \Phi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Pi_t dt \right\} - c_t dt. \end{aligned}$$

上式に, (2.5)(2.6)(2.8)(3.2) 式を代入し, 整理すると, (3.8) 式を得る.

A.2. 命題 1 の証明

先ず, 最適基礎利益は,

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \left\{ \left(\frac{G}{W_t} \right)^\gamma \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t}{G},$$

すなわち, (4.9) 式が得られる.

次に, 値関数に偏微分を施すと, 次の式群を得る.

$$W_t V_W = (1 - \gamma)V, \quad V_X = \gamma V \frac{G_X}{G}, \quad W_t^2 V_{WW} = -\gamma(1 - \gamma)V,$$

$$W_t V_{XW} = \gamma(1 - \gamma)V \frac{G_X}{G}, \quad V_{XX} = \gamma V \left\{ (\gamma - 1) \frac{G_X}{G} \frac{G'_X}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\}.$$

値関数の偏微分結果より, 最適投資 (4.6) 式右辺の分子・分母は次のように表される.

$$\hat{\Psi}_t = V \left((\gamma - 1) \Lambda'_t + \gamma(\gamma + \delta - 1) \frac{G'_X}{G} \Sigma \right), \quad (\text{A.1})$$

$$W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1 - \gamma)V} \right) = (\gamma - 1)(\gamma + \delta)V. \quad (\text{A.2})$$

ゆえに、最適投資 (4.6) 式に (A.1)(A.2) 式を代入すると、(4.10) 式を得る。

偏微分方程式については、

$$\begin{aligned}
W_t V_W \Lambda_t' (\Psi_t^*)' + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix} \right] \\
- \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_t \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} \\
= \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} V_X' \Sigma \Sigma' V_X - \frac{\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}_t'}{2W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right)}, \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

に注意して整理すると、次の値関数 V に関する偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \operatorname{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} V_X' \Sigma \Sigma' V_X - \frac{\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}_t'}{2W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right)} \\
+ W_t (r_t + \kappa \Pi_t) V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X + \frac{\gamma}{1-\gamma} V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \beta V = 0. \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

上記偏微分方程式における第1項～第3項は、(A.1)(A.2) 式を代入し整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \operatorname{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} V_X' \Sigma \Sigma' V_X - \frac{\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}_t'}{2W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right)} \\
= \frac{\gamma}{2} V \operatorname{tr} \left[\Sigma \Sigma' \left\{ (\gamma-1) \frac{G_X}{G} \frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\} \right] + \frac{\gamma^2 \delta}{2(\gamma-1)} \frac{G_X'}{G} \Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \\
- \frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} V \left((\gamma-1) \Lambda_t' + \gamma(\gamma+\delta-1) \frac{G_X'}{G} \Sigma \right) \left((\gamma-1) \Lambda_t + \gamma(\gamma+\delta-1) \frac{G_X'}{G} \Sigma \right)' \\
= V \left\{ \frac{\gamma}{2} \operatorname{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] - \frac{\gamma-1}{2(\gamma+\delta)} \Lambda_t' \Lambda_t - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta} \Lambda_t' \Sigma' \frac{G_X}{G} \right. \\
\left. + \frac{\gamma}{2} \left(\gamma-1 + \frac{\gamma\delta}{\gamma-1} - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \right) \frac{G_X'}{G} \Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \right\} \\
= \gamma V \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)} \Lambda_t' \Lambda_t - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta} \Lambda_t' \Sigma' \frac{G_X}{G} \right. \\
\left. + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \frac{G_X'}{G} \Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \right\}. \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

値関数の偏微分方程式 (A.4) における第6項は、(4.5) 式を代入し整理すると、

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} V_W^{1-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{W} \left\{ \left(\frac{G}{W} \right)^\gamma \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{G}, \quad (\text{A.6})$$

を得る。

(A.5)(A.6) 式等を値関数の偏微分方程式 (A.4) に代入し、両辺を γV で除して整理すると、(4.11) 式が得られる。

A.3. 命題 2 の証明

関数 (4.16) に偏微分を施し，偏微分方程式 (4.15) に代入し， g_0 に (4.13) 式を代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' (aa' + A + aX_t' A' + AX_t a' + AX_t X_t' A')] \\
& + \frac{\delta}{2(\gamma - 1)(\gamma + \delta)} \left(a' + \frac{1}{2} X_t' (A + A') \right) \Sigma \Sigma' \left(a + \frac{1}{2} (A + A') X_t \right) \\
& + \left\{ K\theta - \frac{\gamma + \delta - 1}{\gamma + \delta} \Sigma \lambda - \left(K + \frac{\gamma + \delta - 1}{\gamma + \delta} \Sigma \Lambda \right) X_t \right\}' (a + AX_t) \\
& + g_1 (1 - \log g_1) - g_1 \left(a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right) - \frac{\gamma - 1}{2\gamma(\gamma + \delta)} (\lambda' \lambda + 2\lambda' \Lambda X_t + X_t' \Lambda' \Lambda X_t) \\
& - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left\{ r_0 + \kappa \Pi_0 + (r + \kappa \Pi)' X_t \right\} - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

(A.7) 式は X_t に関する恒等式なので， (a_0, a, A) に関する連立方程式 (4.22)-(4.24) が導出される．