CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-60

消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ・菊池健太郎・楠田浩二

2018 年 3 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ　　菊池 健太郎 *　楠田 浩二 †
滋賀大学大学院博士後期課程　　滋賀大学　　滋賀大学

和文概要　　現代証券投資理論では長期分散投資が推奨されているが，安全証券が短期債である短期投資とは異なり，長期投資における安全証券は長期物価連動債である．従って，消費と証券投資の最適化問題においては，投資対象に長期債を組み入れる必要がある．しかし，同問題では，HJB 方程式（Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式）に非斉次項が現れ，解析解の導出を困難にする．Campbell and Viceira [3] は，短期債と一定満期の長期物価連動債を投資対象とする相対的危険回避度一定の投資家の消費と投資の最適化問題において，HJB 方程式の非斉次項を対数線形近似して近似解析解を導出している．最近になって，楠田 [6] は彼等が導出した近似解析解が高次の一般解における低次の候補解に過ぎないことを示した．本稿では，証券投資の対象を短期債，全満期の国債，株式指数等の代表的指数に拡大した，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定して，HJB 方程式の近似解析解候補を導出し，近似最適投資が状態変数に依存することを示す．近似解析解候補は一般に複数存在することから，これら複数の解候補から最適解を識別するための条件を提示する．

キーワード: 確率的最適化，近似解析解，金融，最適制御，十分条件，動的計画

1.　序論

証券投資においては，効率的なポートフォリオを組成するため，分散投資の重要性が強調されてきたが，分散投資に加えて長期投資が重要である．Campbell and Viceira [3] は，長期投資においては安全証券は短期債ではなく長期物価連動債であることを指摘し，投資対象に長期物価連動債を含めるべきことを強調している．こうした観点から，Campbell and Viceira [3] は金利変動下の消費と株式・債券投資の最適化問題を研究しているが，同問題では，一般に，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式（以下,「HJB 方程式」）は非斉次微分方程式となり解析解の導出を著しく困難にする．

Campbell and Viceira [3] は，同書第 5 章で，短期債と一定満期の長期物価連動債に投資する消費と投資の最適化問題を投資家の CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 効用とバシチェック金利モデルの下で確率制御により解いている．その結果，最適解の導出は非斉次偏微分方程式の求解問題に帰着されている．彼等は同方程式の非斉次項を Campbell [1] の提案した対数線形近似法を応用し，近似解析解を導出している．他方，Kogan and Uppal [5] は状態変数に金利を含む一般的資産に投資する消費と投資の最適化問題に対し漸近展開により近似解析解を導出しているが，Campbell and Viceira [3] は，同近似解析解が彼等の導出した近似解析解の特殊な場合と解釈出来，しかも近似精度が低いことを指摘している．また，Campbell *et. al.* [2] は，消費・富比率が想定される範囲内であれば，彼等の近似解析解の精度が高いことを示している．

最近になって，楠田 [6] は，Campbell and Viceira [3] の導出した近似解析解が高次の一般解における低次の候補解に過ぎないことを示した．そして，Campbell and Viceira [3] の導

*連絡先 kentaro-kikuchi@biwako.shiga-u.ac.jp
†本研究は JSPS 科研費 26380392 の助成を受けたものである．

出した低次の候補解における長期債への最適投資比率は一定で金利に依存せず，投資家が金利水準等に応じて長期債投資比率を調整する行動を説明出来ないのに対し，楠田 [6] の導出した高次の近似解析解における長期債投資比率は金利水準に依存しており，上記投資行動を説明し得ることを示している．

本稿では，証券投資の対象を短期債，全満期の国債，株式指数等の代表的指数に拡大したアフィン潜在ファクター証券市場モデルに一般化し，投資家の CRRA 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題を考察する．尚，潜在ファクターは平均回帰性を持つことが仮定されている．

本稿の主要な結果は次の通り．先ず，消費と投資の最適化問題に対し，Campbell and Viceira [3]，楠田 [6] の近似法を用いて，近似解析解が導出された．導出された近似最適投資は，将来の潜在ファクターの変化に伴う投資機会集合の変化を考慮しない第 1 項の近視眼的需要項と，同変化に対し保険を掛ける第 2 項の保険需要項から成る．Campbell and Viceira [3] で導出されている最適投資では両項とも一定であったのに対し，本稿で導出された近似最適投資では，潜在ファクターの変化が，第 2 項の保険需要項では直接的に，第 1 項の近視眼的需要項ではリスクの市場価格の変化を通じて間接的に，最適投資に影響を与えることが示されている．これは，投資家がリスクの市場価格の変化に伴うリスク・プレミアムの変化に加え，将来の潜在ファクターの水準変化に伴う金利等の水準変化等を考慮して，株式・中長期債投資への投資比率を調整することを意味しているが，極めて自然で，且つ合理的な投資行動であると思料する．

次に，同近似解析解では，近似値関数における未知パラメータ群の連立常微分方程式が導出されているが，同方程式では，上記低次候補解に対応する解のほか，上記高次解に対応する候補解が一般に複数存在しており，これらの候補解から近似最適解を識別する必要がある．そこで，Maslowski and Veverka [8] が示した一般化 Hamiltonian 関数が満たすべき十分条件に関する理論を応用して，上記候補解の中から近似最適解を識別する条件を提示した．

本稿の構成は次の通りである．2 章では，アフィン潜在ファクター証券市場モデルと投資家の最適化問題を説明する．3 章で，HJB 方程式から導出される値関数の偏微分方程式より近似解析解の候補を導出し，4 章で，最適解であるための十分条件を提示する．

2. アフィン潜在ファクター証券市場モデルと投資家の最適化問題

本章では，先ず，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介し，証券価格過程の従う確率微分方程式を示す．次に，投資家の最適化問題を示す．

2.1. 市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する．投資家共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデル化されている．ここで，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は N 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである．確率測度 P の下での期待値作用素を E と表記する．市場では，1 種類の消費財，安全証券 (以下,「短期安全証券」と呼ぶ),「中長期安全証券」としての満期までの期間が最長 $\bar{\tau}$，額面 1 円，任意の満期の信用リスクの無い割引債（以下,「割引国債」と呼ぶ）[1]，J 種類の非債券の代表的指数（株式指数，REIT 指数等）が任意の時点で市場で取引されて

[1]厳密には，物価連動債が中長期安全証券であるが，我が国等の先進諸国では，直近 20 年間以上，物価安定が継続しているほか，物価連動債は流通量が限定的で，投資対象として組み入れ難いことから，本稿では，国債を近似的に「中長期安全証券」と見做している．

いる．短期安全証券の価格を P 円，満期 T の割引債の価格を P^T 円，非債券の代表的指数の配当込みの価格を S^j 円と表記する．ここで，$P_0 = 1$ である．消費財空間は，消費率過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty$ $a.s.$ を満たす非負値適合的過程の空間とする．

本稿では，一般性の高い，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定する．

仮定 1. N 次元潜在ファクター X_t は次の確率過程に従う．

$$dX_t = K(\theta - X_t)\,dt + \Sigma\,dB_t, \tag{2.1}$$

ここで，θ は N 次元定数ベクトル，K, Σ は $N \times N$ 定数行列である．また，K は次のように対角化可能な正値対称行列である．

$$L = Q^{-1}KQ = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N \end{pmatrix},$$

ここで，$l_1, l_2, \cdots, l_N > 0$ であることに留意．

国債(金利の期間構造）については，状態変数 X_t のアフィン・モデル（Duffie and Kan [4] ）を仮定し，非債券の代表的指数については，Mamaysky [7] の提案したアフィン型モデルにおいて非定常項を捨象したモデルを仮定する．

仮定 2. *1.* リスクの市場価格 Λ_t，瞬間的スポット・レート r_t は，潜在ファクター X_t のアフィン関数である．

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= \lambda + \Lambda X_t, & (2.2) \\ r_t &= r_0 + r' X_t, & (2.3) \end{aligned}$$

ここで，$K + \Sigma\Lambda$ は正則である．

2. 非債券の代表的指数の配当過程 D_t^j は潜在ファクター X_t の次式で表される関数である．

$$D_t^j = (d_{j0} + d_j' X_t) \exp(b_{j0} t + b_j' X_t). \tag{2.4}$$

2.2. 証券価格過程

以下では，割引国債の満期までの期間を $\tau = T - t$ と表記する．

補題 1. 仮定 *1*・*2* の下，証券価格過程は次を満たしている．

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t\,dt, \tag{2.5}$$

初期条件：$P_0 = 1$.

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = (r_t + b'(\tau)\Sigma\Lambda_t)\ dt + b'(\tau)\Sigma\,dB_t, \tag{2.6}$$

ここで，$b(\tau)$ は次の非斉次の定数係数線形連立常微分方程式の解である．

$$\frac{db(\tau)}{d\tau} = -(K + \Sigma\Lambda)' b(\tau) - r, \tag{2.7}$$

境界条件：$b(0) = 0$.

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = \left(r_t + b_j' \Sigma \Lambda_t\right) dt + b_j' \Sigma \, dB_t, \tag{2.8}$$

ここで，

$$b_j = -(K + \Sigma\Lambda)'^{-1}(r - d_j). \tag{2.9}$$

証明．補論 A.1 参照． □

2.3.　投資家の最適化問題

非債券の代表的指数に対する投資比率を Φ_t^j と表記する．また，割引国債については，任意の満期の割引国債を投資対象としているため，富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる．そこで，割引国債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$ と表記する [2]．以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi_t = \left(\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) b(\tau) \, d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j b_j \right)' \Sigma. \tag{2.10}$$

以下，Ψ_t を「投資過程」乃至は「投資」と略称する．

このとき，予算制約式が次の補題で示される．

補題 2. 投資過程 Ψ_t と消費率過程 c_t を所与とする．このとき，仮定 *1*・*2* の下，富過程 W_t は次の予算制約式を満たす．

$$dW_t = \left\{ W_t \left(r_t + \Psi_t \Lambda_t \right) - c_t \right\} dt + W_t \Psi_t \, dB_t. \tag{2.11}$$

証明．補論 A.2 参照． □

仮定 3. 投資家は次の相対的危険回避度一定効用を予算制約式 *(2.11)* の下で最大化する．

$$U(c) = E\left[\int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \right]. \tag{2.12}$$

予算制約式 (2.11) は，富過程が $u = (c, \Psi)$ で決定されることを示しており，投資家の効用最大化問題における制御変数は $u = (c, \Psi)$ であることが分かる．状態変数を $Z' = (W, X')$ と表記する．また，予算制約式 (2.11) を満たす制御変数 $u = (c, \Psi)$ を初期状態 $Z_0' = (W_0, X_0')$ に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を $\mathcal{B}(Z_0)$ と表記する．このとき，本稿における消費と投資の最適化問題と値関数 $V(Z_0)$ が次式で定義される．

$$V(Z_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(Z_0)} E\left[\int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \right]. \tag{2.13}$$

3.　近似解析解の導出

本章では，HJB 方程式から推測された値関数を構成する未知関数 $G(X_t)$ の偏微分方程式を導出した後，同方程式の非斉次項を Campbell and Viceira [3]，楠田 [6] の技法で近似して，近似解析解を導出する．

[2] 尚，このとき，或る特定の満期の割引国債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため，許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする．

3.1.　値関数（を構成する未知関数）の偏微分方程式の導出

無限時間問題である本問題では，HJB 方程式における未知関数は時間変数を含まず，値関数と一致することに留意すると，HJB 方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned}\sup_{u\in\mathcal{B}(Z_0)} & \left\{ \begin{pmatrix} W_t\left(r_t+\Psi_t\Lambda_t\right)-c_t \\ K(\theta-X_t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} \right. \\ & \left. +\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix}\right]-\beta V+\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right\}=0, \quad (3.1) \\ & \text{s.t.} \quad \lim_{T\to\infty} E[e^{-\beta T}V\left(Z_T\right)]=0.\end{aligned}$$

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解 $u^*=(c^*,\Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.2)$$

$$\Psi_t^* = \frac{\hat{\Psi}_t}{W_t^2V_{WW}}, \quad (3.3)$$

ここで，

$$\hat{\Psi}_t=-W_t\left\{V_W\Lambda_t'+V_{WX}\Sigma\right\}. \quad (3.4)$$

最適消費 (3.2) 式と最適投資 (3.3) 式を HJB 方程式 (3.1) に代入し，

$$W_tV_W\Lambda_t'(\Psi_t^*)'+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'V_{XX}\right]-\frac{\hat{\Psi}_t\hat{\Psi}_t'}{2W_t^2V_{WW}}, \quad (3.5)$$

に注意して整理すると，次の値関数 V に関する偏微分方程式が得られる．

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'V_{XX}\right]-\frac{\hat{\Psi}_t\hat{\Psi}_t'}{2W_t^2V_{WW}}+W_tr_tV_W+\{K(\theta-X_t)\}'V_X+\frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{1-\frac{1}{\gamma}}-\beta V=0. \quad (3.6)$$

上記偏微分方程式から値関数は X_t の未知関数 $G(X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$V(Z_t)=\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\gamma}. \quad (3.7)$$

値関数 V に偏微分を施し，(3.3) 式に代入し，値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.6) に代入すると，次の命題を得る．

命題 1. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(2.13)* の値関数，最適消費，最適投資は，それぞれ *(3.7)* 式，*(3.8)* 式，*(3.9)* 式で表される．ここで，$G(X_t)$ は *2* 階の偏微分方程式 *(3.10)* の解である．

$$c_t^* = \frac{W_t}{G}, \quad (3.8)$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma}\Lambda_t'+\frac{G_X'}{G}\Sigma, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right]+\left\{K(\theta-X)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda_t\right\}'\frac{G_X}{G}+\frac{1}{G}-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Lambda_t'\Lambda_t+\frac{\gamma-1}{\gamma}r_t+\frac{\beta}{\gamma}\right)=0. \quad (3.10)$$

証明. 補論 A.3 参照. □

3.2. 偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

偏微分方程式 (3.10) は非斉次項 $1/G$ を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．Campbell and Viceira [3] は CRRA 効用とバシチェック金利モデルを仮定し，消費と 2 証券（安全証券と長期物価連動債）投資の最適化問題で導出した金利関数の常微分方程式の近似解析解を導出する際に非斉次項の対数線形近似を用いている．すなわち，(3.8) 式より，$1/G(X_t)$ が消費・富比率 c_t^*/W_t と等しく，同比率が安定的であることに着目し，$1/G(X_t)$ を $E[\log(c_t^*/W_t)]$ の周りで対数線形近似している．しかし，この場合，$E[\log(c_t^*/W_t)]$ は時間変数に依存する．そこで，楠田 [6] は一定値をとる $\lim_{t\to\infty} E[\log(c_t/W_t)]$ の周りで対数線形近似を行っている．本稿もこれに従って非斉次項を次のように対数線形近似する．

$$\frac{1}{G(X_t)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t), \tag{3.11}$$

ここで，

$$g_0 = g_1(1 - \log g_1), \tag{3.12}$$

$$g_1 = \exp\Bigl(\lim_{t\to\infty} E\Bigl[\log\Bigl(\frac{c_t^*}{W_t}\Bigr)\Bigr]\Bigr). \tag{3.13}$$

偏微分方程式 (3.10) における非斉次項 $1/G$ を (3.11) 式で近似し，Λ_t，r_t に，それぞれ (2.2) 式，(2.3) 式を代入すると，次の近似偏微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] + \left\{K(\theta - X_t) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma(\lambda + \Lambda X_t)\right\}'\frac{G_X}{G} - g_1 \log G \\ + g_0 - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\lambda+\Lambda X_t)'(\lambda+\Lambda X_t) - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r_1' X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0.\end{aligned} \tag{3.14}$$

近似偏微分方程式 (3.14) の解が次式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される．

$$G(X_t) = \exp\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t' A X_t\right). \tag{3.15}$$

このとき，

$$g_1 = \exp\Bigl(-\lim_{t\to\infty} E\left[\log G(X_t)\right]\Bigr) = \exp\left(\lim_{t\to\infty}\left[-a_0 - a'E[X_t] - \frac{1}{2}E[X_t' A X_t]\right]\right), \tag{3.16}$$

は次の補題で計算される．

補題 3. 仮定 *1-3* の下，g_1 は (a_0, a, A) により次式で表される．

$$g_1 = \exp\left(-a_0 - a'\theta - \frac{1}{2}\left(\theta' A\,\theta + \operatorname{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)' M Q^{-1}\Sigma\right]\right)\right), \tag{3.17}$$

ここで，行列 P の第 (i,j) 成分を P_{ij} と表記すると，

$$M_{ij} = \frac{1}{l_i + l_j}(Q' A\, Q)_{ij}.$$

証明. X_t は線形確率微分方程式 (2.1) の解として，次のように表される．

$$X_t = Qe^{-tL}Q^{-1}X_0 + Q\left(I - e^{-tL}\right)Q^{-1}\theta + Q\int_0^t e^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\, dB_s.$$

よって，$\lim_{t\to\infty} e^{-tL} = 0, E[dB_s] = 0$ に注意すると，$\lim_{t\to\infty} E[X_t] = \theta,$ が得られる．

次に，

$$\begin{aligned}X_t' A X_t = &\left\{Qe^{-tL}Q^{-1}X_0 + Q\left(I - e^{-tL}\right)Q^{-1}\theta + Q\int_0^t e^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\, dB_s\right\}' \\ &\qquad A\left\{Qe^{-tL}Q^{-1}X_0 + Q\left(I - e^{-tL}\right)Q^{-1}\theta + Q\int_0^t e^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\, dB_s\right\}.\end{aligned}$$

ゆえに，$E[dB_s dB_t'] = \delta_{st} I ds$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} E[X_t' A X_t] &= \theta' A\,\theta + \lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)' e^{-(t-s)L} Q' A\, Q e^{-(t-s)L} Q^{-1}\Sigma\right] ds \\ &= \theta' A\,\theta + \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)' \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-(t-s)L} Q' A\, Q e^{-(t-s)L} ds\, Q^{-1}\Sigma\right] \\ &= \theta' A\,\theta + \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)' M Q^{-1}\Sigma\right].\end{aligned}$$

以上より，(3.17) 式が導かれる． □

近似偏微分方程式 (3.14) の解に基づく近似値関数及び近似最適制御をそれぞれ $\tilde{V}, \tilde{u}^* = (\tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*)$ と定義する．

3.3. 近似解析解

関数 (3.15) に偏微分を施し，偏微分方程式 (3.14) に代入し，g_0 に (3.12) 式を代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left(aa' + A + aX_t'A' + AX_t a' + AX_t X_t' A'\right)\right] \\ &\qquad + \left\{K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)X_t\right\}'(a + AX_t) \\ &+ g_1(1 - \log g_1) - g_1\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t' A X_t\right) - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\left(\lambda'\lambda + 2\lambda'\Lambda X_t + X_t'\Lambda'\Lambda X_t\right) \\ &\qquad - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r_1' X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \quad (3.18)\end{aligned}$$

上式は X_t に関する恒等式なので，次の (a_0, a, A) に関する連立方程式が導出される．

$$\frac{1}{2}A'\Sigma\Sigma' A - \left(K' + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Lambda'\Sigma'\right)A - \frac{1}{2}g_1 A - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Lambda'\Lambda = 0, \quad (3.19)$$

$$A'\Sigma\Sigma' a + A'K\theta - K'a - \frac{\gamma-1}{\gamma}(A'\Sigma\lambda + \Lambda'\Sigma' a) - g_1 a - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_1 = 0, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a'\Sigma\Sigma' a + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma' A] + \left\{K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right\}' a \\ &\qquad + g_1(1 - a_0 - \log g_1) - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 - \frac{\beta}{\gamma} = 0, \quad (3.21)\end{aligned}$$

ここで，g_1 は (3.17) 式で表されている．

但し，上記値関数を構成する未知関数が近似偏微分方程式 (3.14) の解として近似されている場合の値関数，最適消費，最適投資をそれぞれ「近似値関数」,「近似最適消費」,「近似最適投資」と呼び，それぞれ $\tilde{V}, \tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*$ と表記する．このとき，次の命題を得る．

命題 2. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(2.13)* の近似値関数，近似最適消費，近似最適投資は次を満たしている．

$$\tilde{V}(Z_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left[\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right], \tag{3.22}$$

$$\tilde{c}_t^* = \exp\left[-\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right]W_t, \tag{3.23}$$

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma}\left(\lambda + \Lambda X_t\right)' + \left(a + AX_t\right)'\Sigma, \tag{3.24}$$

ここで，(a_0, a, A) は連立方程式 *(3.19)-(3.21)* の解である．

留意点 1. 本問題の結果を *CRRA* 効用とバシチェック金利モデルを仮定し，消費と *2* 証券（安全証券と長期物価連動債）投資の最適化問題を研究した *Campbell and Viceira [3]* の結果と比較すると，彼等の問題ではリスクの市場価格が定数であるほか，未知関数 G の推測において $A = 0$ と推測されているため，彼等が本問題に対し導出するであろう近似最適投資 $\tilde{\Psi}_t^{CV}$ が満たす式は次式のように表される．

$$\tilde{\Psi}_t^{CV} = \frac{1}{\gamma}\lambda' + a'\Sigma. \tag{3.25}$$

上式では，最適投資は将来の状態変数の変化に伴う投資機会集合の変化を考慮しない第 *1* 項の近視眼的需要項も，同変化に対し保険を掛ける第 *2* 項の保険需要項も，何れも一定である．翻って，我々の導出した *(3.24)* 式では，状態変数の変化が，第 *2* 項の保険需要項では直接的に，第 *1* 項の近視眼的需要項ではリスクの市場価格の変化を通じて間接的に，最適投資に影響を与えることが示されている．これは，投資家がリスクの市場価格の変化に伴うリスク・プレミアムの変化に加え，将来の潜在ファクターの水準変化に伴う金利等の水準変化等を考慮して，株式・中長期債投資への投資比率を調整することを意味しているが，極めて自然で，且つ合理的な投資行動であると思料する．

留意点 2. 近似値関数を構成する係数体系 (a_0, a, A) に関する連立方程式 *(3.19)-(3.21)* は一般に解が複数存在するので，これら複数の解は本問題の最適解の候補に過ぎない．例えば，*Campbell and Viceira [3]* が推測した解は，連立方程式 *(3.19)-(3.21)* において $A = 0$ とした場合に導出される解に対応する．すなわち，本稿で示された高次の一般解における低次の候補解に過ぎないのである．これら複数の候補解から最適解を識別するの条件は次章で示す．

標準ブラウン運動が N 次元で，非債券の代表的指数が J 種類なので，割引国債については，$I(= N - J)$ 群の投資対象を設定することにより，最適投資を決定出来る．次に，代表的な 2 例を示す．

例 1. 投資家が割引国債の満期までの期間を I 群に区分し，各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を採用する場合を考察する．説明の便宜上，$\tau_0 = 0$，$\tau_I = \bar{\tau}$ と表記し，割引国債の満期までの期間を $(\tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \cdots, (\tau_{I-1}, \tau_I]$ に区分する．また，投

資比率密度過程を $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \cdots, \varphi_t^I)$ とするほか，次のように記法を定める．

$$\Phi_{1t} = \begin{pmatrix} \Phi_{1t}^P \\ \Phi_{1t}^S \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1^P \\ B_1^S \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

ここで，

$$\Phi_{1t}^P = \begin{pmatrix} \varphi_t^1(\tau_1 - \tau_0) \\ \varphi_t^2(\tau_2 - \tau_1) \\ \vdots \\ \varphi_t^I(\tau_I - \tau_{I-1}) \end{pmatrix}, \quad \Phi_{1t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \quad B_1^P = \begin{pmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} b'(\tau)d\tau \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} b'(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I} b'(\tau)d\tau \end{pmatrix}, \quad B_1^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix}.$$

このとき，*(3.24)* 式より，近似最適投資比率 $\tilde{\Phi}_{1t}^*$ は次式で表される．

$$\tilde{\Phi}_{1t}^* = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B_1)^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + B_1^{-1}(a + AX_t). \tag{3.27}$$

尚，短期安全証券への近似最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \tilde{\varphi}_t^{*i}(\tau_i - \tau_{i-1}) - \sum_{j=1}^J \tilde{\Phi}_t^{*j}$ である．

例 2. 投資家は I 種類の一定満期の割引国債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．投資対象国債の満期を $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_I \leq \bar{\tau}$ とし，各満期の国債への投資比率を $\Phi_{P1}, \Phi_{P2}, \cdots, \Phi_{PI}$ とする．次のように記法を定める．

$$\Phi_{2t} = \begin{pmatrix} \Phi_{2t}^P \\ \Phi_{2t}^S \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_2^P \\ B_2^S \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

ここで，

$$\Phi_{2t}^P = \begin{pmatrix} \Phi_{Pt}^1 \\ \Phi_{Pt}^2 \\ \vdots \\ \Phi_{Pt}^I \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2t}^S \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \quad B_2^P = \begin{pmatrix} b'(\tau_1) \\ b'(\tau_2) \\ \vdots \\ b'(\tau_I) \end{pmatrix}, \quad B_2^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

このとき，*(3.24)* 式より，近似最適投資比率 $\tilde{\Phi}_{2t}^*$ は次式で表される．

$$\tilde{\Phi}_{2t}^* = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B_2)^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + B_2^{-1}(a + AX_t). \tag{3.30}$$

尚，短期安全証券への近似最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \tilde{\Phi}_{Pt}^{*i} - \sum_{j=1}^J \tilde{\Phi}_t^{*j}$ である．

4.　最適解の十分条件

上記連立方程式の解は一般に非最適解を含めて複数存在する．本章では，Maslowski and Veverka [8] の理論を応用して最適解の十分条件を提示する．

4.1.　一般化 Hamiltonian 関数による本問題の再定式化

本問題を Maslowski and Veverka [8] で定義されている一般化 Hamiltonian 関数により再定式化するため，本問題の状態変数 $Z_t' = (W_t, X_t')$ の確率微分方程式を次のように表現する．

$$dZ_t = \mu(Z_t, u_t)\, dt + \sigma(Z_t, u_t)\, dB_t, \tag{4.1}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\mu(Z_t, u_t) &= \begin{pmatrix} W_t\,(r_t + \Psi_t \Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t\,\{r_0 + \Psi_t \lambda + (r' + \Psi_t \Lambda) X_t\} - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}, \quad (4.2) \\
\sigma(Z_t, u_t) &= \begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}. \quad (4.3)
\end{aligned}
$$

また，補助変数 (q_t, R_t) を次のように表記する．

$$
q_t = \begin{pmatrix} q_{tw} \\ q_{tx} \end{pmatrix}, \qquad R_t = \begin{pmatrix} R_{tw} \\ R_{tx} \end{pmatrix},
$$

ここで，q_{tw} はスカラー，q_{tx} は $N \times 1$ ベクトル，R_{tw} は $1 \times N$ ベクトル，R_{tx} は $N \times N$ 行列である．

このとき，本最適化問題 (2.13) の一般化 Hamiltonian 関数 H は次式で表される．

$$
\begin{aligned}
H(Z_t, u_t, q_t, R_t) = {} & \{W_t\,\{r_0 + \Psi_t \lambda + (r' + \Psi_t \Lambda) X_t\} - c_t\}\, q_{tw} + (K\theta - K X_t)' q_{tx} \\
& + \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} R_{tw} \\ R_{tx} \end{pmatrix} \right] + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \beta (W_t q_{tw} + X_t' q_{tx}). \quad (4.4)
\end{aligned}
$$

4.2. 制御変数及び補助変数の最適解

最適解は状態変数に関する（前進）確率微分方程式 (4.1) 及び補助変数に関する次の後退確率微分方程式から構成される前進・後退確率微分方程式体系を満たしている（Maslowski and Veverka [8]）．

$$
-dq_t = \left(\mu_Z(Z_t, u_t) q_t + \sum_{n=1}^{N} \sigma^n(Z_t, u_t) R_t^n - \beta q_t \right) dt - R_t dB_t, \quad (4.5)
$$

ここで，σ^n, R_t^n は各行列の第 n 列を示している．

このとき，次の補題を得る．

補題 4. *仮定 1-3 の下，本問題 (2.13) の一般化 Hamiltonian 関数 H における最適解 (u_t^*, q_t^*, R_t^*) は次の 2 条件を満たしている．*

1. *制御変数 $u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$ は (3.2)(3.3) 両式を満たしている．*
2. *補助変数 (q_t^*, R_t^*) は次を満たしている．*

$$
\begin{aligned}
q_t^* &= \begin{pmatrix} V_W(Z_t) \\ V_X(Z_t) \end{pmatrix}, \quad (4.6) \\
R_t^* &= \begin{pmatrix} V_{WW}(Z_t) & V_{WX}(Z_t) \\ V_{XW}(Z_t) & V_{XX}(Z_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t V_{WW}(Z_t) \Psi_t^* + V_{WX}(Z_t) \Sigma \\ W_t V_{XW}(Z_t) \Psi_t^* + V_{XX}(Z_t) \Sigma \end{pmatrix}. \quad (4.7)
\end{aligned}
$$

ここで，V は HJB 方程式 (3.1) の解である．

証明. 補論 A.4 参照. □

4.3. 十分条件

$u^* = (c^*, \Psi^*)$ が最適解であるための十分条件は，関数 $(z,u) \to H(z,u,q^*,R^*)$ が凹関数であることなので，同関数の凹性を条件として示すために，一般化 Hamiltonian 関数 (4.4) 式を偏微分すると，Hessian H は次のように表される．

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} 0 & H_{WX} & 0 & H_{W\Psi'} \\ H_{XW} & 0 & 0 & H_{X\Psi'} \\ 0 & 0 & H_{cc} & 0 \\ H_{\Psi'W} & H_{\Psi'X} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

ここで，

$$\begin{aligned} H_{XW} &= V_W(r_1 + \Lambda'(\Psi_t^*)'), \\ H_{cc} &= -\gamma\, c_t^{*-(\gamma+1)}, \\ H_{\Psi'W} &= V_W(\lambda + \Lambda X_t) + W_t V_{WW}(\Psi_t^*)' + \Sigma' V_{XW}, \\ H_{\Psi'X} &= W_t V_W \Lambda. \end{aligned}$$

従って，上式群の (V, c^*, Ψ^*) を $(\tilde{V}, \tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*)$ に置き換えると，本問題の近似値関数の最適性を検証するための近似 Hessian $\tilde{\mathsf{H}}$ が次のように表される．

$$\tilde{\mathsf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{H}_{WX} & 0 & \tilde{H}_{W\Psi'} \\ \tilde{H}_{XW} & 0 & 0 & \tilde{H}_{X\Psi'} \\ 0 & 0 & \tilde{H}_{cc} & 0 \\ \tilde{H}_{\Psi'W} & \tilde{H}_{\Psi'X} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{XW} &= W_t^{-\gamma} \exp\left[\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t' A X_t\right)\right]\left\{r_1 + \Lambda'\left(\frac{1}{\gamma}\left(\lambda + \Lambda X_t\right) + \Sigma'\left(a + AX_t\right)\right)\right\}, \\ \tilde{H}_{cc} &= -\gamma\, W_t^{-(\gamma+1)} \exp\left[(\gamma+1)\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t' A X_t\right)\right], \\ \tilde{H}_{\Psi'W} &= 0, \\ \tilde{H}_{\Psi'X} &= W_t^{1-\gamma} \exp\left[\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t' A X_t\right)\right]\Lambda. \end{aligned}$$

以上より，状態変数・制御変数空間の実用上適切な領域において偏微分方程式の対数線形近似の精度が十分に高く，それゆえ，近似値関数 (3.22) 式の近似精度が十分に高いのであれば，連立方程式 (3.19)-(3.21) の複数候補解から最適解を識別するための条件として，関数 $(z,u) \to H(z,u,q^*,R^*)$ の凹性を近似的に意味する，近似 Hessian $\tilde{\mathsf{H}}$ が負定符号であることが利用出来る．

参考文献

[1] J.-Y. Campbell: Intertemporal asset pricing without consumption data. *American Economic Review*, **83** (1993), 487-512.

[2] J.-Y. Campbell, P. J. Maenhout, and L. M. Viceira: Stock market mean reversion and the optimal equity allocation of a long-lived investor. *European Economic Review*, **5**, (2001), 269-292.

[3] J.-Y. Campbell, and L. M. Viceira: *Strategic Asset Allocation* (Oxford University Press, Oxford, New York, 2002).

[4] D. Duffie, and R. Kan: A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, **6** (1996), 379-406.

[5] L. Kogan, and R. Uppal: Risk aversion and optimal portfolio policies in partial and general equilibrium economies. Working paper 8609, National Bureau of Economic Research (2001).

[6] 楠田浩二：消費と債券投資の多期間最適問題における高次の近似解析解．Discussion paper J-35，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2013)．

[7] H. Mamaysky: A model for pricing stocks and bonds. Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management (2002).

[8] B. Maslowski, and P. Veverka: Sufficient stochastic maximum principle for discounted control problem. *Applied Mathematics and Optimization*, **70** (2014), 225-252.

A.　証明

A.1.　補題 1 の証明

標準ブラウン運動 B とリスクの市場価格 Λ により，

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \Lambda_s \, ds, \tag{A.1}$$

で定義される確率過程 $\tilde{B}_t$ は，Girsanov の定理より，リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である．よって，リスク中立確率測度の下で，潜在ファクターの確率微分方程式は，

$$\begin{aligned} dX_t &= (K(\theta - X_t) - \Sigma\Lambda_t) \, dt + \Sigma \, d\tilde{B}_t \\ &= \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} \, dt + \Sigma \, d\tilde{B}_t, \end{aligned}$$

と表現される．

今，割引国債 P^T を r_t の上に書かれた派生資産と看做すと，r_t は X_t のアフィン関数なので，滑らかな関数 $f(X_t, t)$ により，

$$P_t^T = f(X_t, t), \tag{A.2}$$

と表される．このとき，無裁定条件から，f は次の偏微分方程式の解となっていることが示される．

$$f_t + \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}' f_X + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma' f_{XX}] - (r_0 + r'X_t)f = 0, \tag{A.3}$$

終端条件：$f(X_T, T) = 1$.

一方，本モデルはアフィン・モデルなので，$\tau = T - t$ とおくと，上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 $b_0(\tau), b(\tau)$ によって

$$f(X_t, t) = e^{b_0(\tau)+b(\tau)'X_t}, \tag{A.4}$$

境界条件：$b_0(0) = 0, b(0) = 0$,
と書けることが示される．(A.4) 式に偏微分を施し，(A.3) 式に代入すると，次式を得る．

$$-\frac{db_0(\tau)}{d\tau} - \frac{db(\tau)'}{d\tau}X_t + b(\tau)'\{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} + \frac{1}{2}b'(\tau)\Sigma\Sigma'b(\tau) - (r_0 + r'X_t) = 0. \tag{A.5}$$

(A.5) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(A.5) 式を得る．最後に，(A.4) 式を対数微分して P_t^T の確率微分方程式を導出すると，(2.6) 式を得る．

非債券の代表的指数を $\tilde{S}_t^j$ と表記する．このとき，Mamaysky [7] より，$\tilde{S}_t^i$ は次式で表され，

$$\tilde{S}_t^j = \exp(b_{j0}t + b_j'X_t). \tag{A.6}$$

配当率過程は次式となる．

$$\frac{D_t^j}{\tilde{S}_t^j} = (d_{j0} + d_j'X_t). \tag{A.7}$$

(A.6)(A.7) 両式より，配当込み指数に関する無裁定条件から，次式を得る．

$$b_{j0} + b_j'\{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} + \frac{1}{2}b_j'\Sigma\Sigma'b_j + (d_{j0} + d_j'X_t) - (r_0 + r'X_t) = 0. \tag{A.8}$$

(A.8) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(2.9) 式を得る．

A.2.　補題 2 の証明

満期までの期間 τ の割引国債価格を $P_t(\tau)$ と表記する．短期安全証券，割引国債，代表的指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^i))$ とすると，次式が成り立つ．

$$W_t = \vartheta_t P_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau)P_t(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{J} \vartheta_t^i S_t^j.$$

このとき，所与の c の下，自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^i))$ は，次式を満たしている．

$$\begin{aligned} dW_t &= \vartheta_t dP_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau)dP_t(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{J} \vartheta_t^i dS_t^j - c_t dt \\ &= W_t\left\{\left(1 - \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j\right)\frac{dP_t}{P_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)}d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j}\right\} - c_t dt. \end{aligned}$$

上式に，(2.5)(2.6)(2.8) 式を代入し，整理すると，(2.11) 式を得る．

A.3.　命題 1 の証明

先ず，最適消費は，

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \left\{ \left(\frac{G}{W_t} \right)^{\gamma} \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t}{G}.$$

次に，値関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$W_t V_W = (1-\gamma)V, \qquad V_X = \gamma V \frac{G_X}{G}, \qquad W_t^2 V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V,$$

$$W_t V_{XW} = \gamma(1-\gamma)V \frac{G_X}{G}, \qquad V_{XX} = \gamma V \left\{ (\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\}.$$

値関数の偏微分結果より，最適投資 (3.3) 式右辺の分子・分母は次のように表される．

$$\hat{\Psi}_t = (\gamma-1)V \left(\Lambda_t' + \gamma \frac{G_X'}{G} \Sigma \right), \tag{A.9}$$

$$W_t^2 V_{WW} = \gamma(\gamma-1)V. \tag{A.10}$$

ゆえに，最適投資 (3.3) 式に (A.9)(A.10) 式を代入すると，(3.9) 式を得る．

値関数 V の偏微分方程式 (3.6) における第 2 項までは，(A.9)(A.10) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,[\Sigma\Sigma' V_{XX}] - \frac{\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}_t'}{2W_t^2 V_{WW}} \\
&\quad = \frac{\gamma}{2} V\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma' \left\{ \frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\} \right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma} V \left(\Lambda_t + \gamma\Sigma' \frac{G_X}{G} \right)' \left(\Lambda_t + \gamma\Sigma' \frac{G_X}{G} \right) \\
&\quad\quad = V \left\{ \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\Lambda_t'\Lambda_t - (\gamma-1)\Lambda_t'\Sigma' \frac{G_X}{G} \right\}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

値関数の偏微分方程式 (3.6) における第 5 項は，(3.2) 式を代入し整理すると，

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} V_W^{1-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{W} \left\{ \left(\frac{G}{W} \right)^{\gamma} \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{G}, \tag{A.12}$$

を得る．

(A.11)(A.12) 式等を値関数の偏微分方程式 (3.6) に代入し，両辺を γV で除して整理すると，(3.10) 式が得られる．

A.4.　補題 4 の証明

先ず，一般化 Hamitononian 関数 (4.4) 式の補助変数 (q_t, R_t) に (4.6)(4.7) 式を代入し，最大化問題を解くと，最適制御変数 $u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$ は (3.2)(3.3) 両式を満たしていることが確認出来る．このとき，これら最適制御変数が代入された HJB 方程式 (3.5) の V_Z に (4.6) 式を代入すると，次式が成立している（時間変数は省略，以下同様）．

$$\mu' q + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,[\sigma\sigma'\mu_Z] - \beta V + \frac{c^{*(1-\gamma)}}{1-\gamma} = 0. \tag{A.13}$$

上式を状態変数の第 i 成分 Z_i で偏微分し，整理すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\mu' q_{Z_i} + \mu'_{Z_i} q + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\sigma_t \sigma' q_{ZZ_i}\right] + \mathrm{tr}\left[q_Z \sigma \sigma'_{Z_i}\right] - \beta q_i \\ + c^*_{Z_i}\left\{\mu'_{c^*} q + (c^*)^{-\gamma}\right\} + \Psi^*_{Z_i}\left\{\mu'_{\Psi^*} q + \mathrm{tr}\left[q_Z \sigma \sigma'_{\Psi^*}\right]\right\} = 0. \quad \text{(A.14)}\end{aligned}$$

上式における第 6・7 項については，$u^*_t = (c^*_t, \Psi^*_t)$ が最適制御変数であることに留意すると，

$$\mu'_{c^*} q + (c^*)^{-\gamma} = 0, \qquad \mu'_{\Psi^*} q + \mathrm{tr}\left[q_Z \sigma \sigma'_{\Psi^*}\right] = 0.$$

従って，次式を得る．

$$\mu' q_{Z_i} + \mu'_{Z_i} q + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma_t \sigma' q_{ZZ_i}\right] + \mathrm{tr}\left[q_Z \sigma \sigma'_{Z_i}\right] - \beta q_i = 0. \quad \text{(A.15)}$$

他方，q^*_i を微分すると，伊藤の補題により，次式を得る．

$$-dq^*_i = -\left(q^*_{iZ} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\sigma \sigma' q^*_{iZZ}\right]\right) dt - (q^*_{iZ})' \sigma dB_t. \quad \text{(A.16)}$$

上式を (A.15) 式と $R^*_i = q_z \sigma$ を用いて変形すると，(q^*_t, R^*_t) が後退確率微分方程式 (4.5) を満たしていることが確認出来る．