CRR DISCUSSION PAPER SERIES　J

Discussion Paper No. J-40

相似拡大的頑健効用と 2 ファクター金利モデルに基づく消費と株式・債券投資の多期間最適化問題における 2 種類の近似解析解

楠田　浩二

2013 年 6 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-40

相似拡大的頑健効用と2ファクター金利モデルに基づく消費と株式・債券投資の多期間最適化問題における2種類の近似解析解

楠田　浩二[1]

2013年6月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY
1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

キーワード: 確率制御、株式投資、近似解析解、金利リスク、債券投資、相似拡大的頑健効用、2ファクター・モデル、ナイトの不確実性、ポートフォリオ最適化

JEL 分類番号: C62、D14、G11

概 要

ナイトの不確実性下の消費と証券投資の多期間最適化問題として、楠田 (2013c) は安全証券と全満期の債券を投資対象に「相似拡大的頑健効用」(Maenhout (2004)) と金利の2ファクター・モデルを仮定し、2債券群の最適投資比率の近似解析解を導出している。本稿では、短期債券群を安全証券と看做すことにより、安全証券の代わりに株式指数を組み入れ、相似拡大的頑健効用最大化のための株式指数と全債券の最適ポートフォリオ問題の近似解析解導出を試みる。リスクの市場価格が短期金利と平均短期金利のアフィン関数である「本質的アフィン・モデル」の下では数値解法負担が高い近似解析解が導出され、リスクの市場価格が一定の「完備アフィン・モデル」と金利モデルの係数間の制約下で数値解法負担が非常に低い近似解析解が導出される。

[1]本稿は滋賀大学経済学部附属リスク研究センター東アジア保険プロジェクトにおける中国東北財経大学金融学院との共同研究の成果の一部である。尚、本研究の過程では、リスク研究センター長・久保英也教授に有益な御指摘と愛情溢れる御鞭撻を賜った。ここに特筆して厚く感謝申し上げる。

1　序論

効率的投資とされる長期分散投資を企図する投資家が、最低限の効率的分散投資として、期待収益率の高い株式等の証券を収益率向上を主たる目的に、同証券と収益率間の相関が低く収益率の変動が小さい債券等の長期固定収入証券を収益率安定を主たる目的に投資することは合理性が高いと考えられる。尚、後者の債券投資においては、投資家は金利変動リスク等の制御を企図したデュレーション（債券平均残存期間）管理のために複数満期の債券を保有し、金利等の状態に応じてポジション調整を行う必要がある。

一方、今般の世界金融危機では、欧米の金融機関がサブプライム・ローンを原資とする証券化商品等の価格下落確率を過少評価し過大な投資を行っていたことが指摘されている。しかし、我が国の金融機関は同時期にかかる証券化商品への投資を殆ど行っていない。彼我の投資行動の差異は彼我の主観確率の差異、或いは相対的危険回避度の差異に起因するというのが従来の「ナイトの不確実性」(Knight (1921)) を無視した経済学的解釈であった。しかし、エクイティ・プレミアム・パズル、ポートフォリオ・パズル等の従来モデルでは解釈出来ない様々な現象が指摘されている中、ナイトの不確実性を考慮した解析的に取り扱い易い効用が提案されていることもあって、これらのパズルをナイトの不確実性を考慮して解明する動きがみられるようになっている。ここでの彼我の金融機関の投資行動の差異も、ナイトの不確実性を考慮すれば、彼我の主観確率・相対的危険回避度の差異に加え、彼我の「曖昧性回避度」の差異に起因するという解釈が可能となる。

楠田 (2013c) は、ナイトの不確実性下、全満期の債券を対象とする消費と債券ポートフォリオの多期間最適化問題に短期金利と平均短期金利を状態変数とする 2 ファクター金利モデルと「相似拡大的頑健効用」(Maenhoout (2004)) を仮定して最適投資比率等の近似解析解を導出している。その結果、2 ファクター・モデルは 3 資産の最適投資を決定出来るという理論的帰結通り、債券の最適投資比率密度の満たす条件が 2 式となっており、2 債券群の最適投資比率を決定出来る。しかし、同近似解析解では、値関数を構成する、短期金利・平均短期金利の 2 変数関数の 7 係数は 7 元連立非線形方程式の数値解として陰伏的にしか与えられてない。このため、当該最適投資比率を用いて投資家の相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」を推定するなどの実証分析は困難になる。そこで、楠田 (2013c) は金利モデルの係数間に妥当と判断される制約を仮定し、上記数値解法負担が 1 変数方程式の数値解導出にまで軽減された近似解析解を導いており、上記推定等の実証分析を容易にしている。しかし、楠田 (2013c) では、投資家が収益率向上を企図して行っている高期待収益率資産が投資対象に含まれていないほか、リスクの市場価格が一定という制約的仮定が置かれている。

前者の問題に関しては、当該モデルに同資産を含めると、2 ファクター・モデルゆえ 3 資産までの最適投資しか決定できないことから、安全証券と高期

待収益率資産の最適投資比率を決定しようとすれば、債券への最適投資比率密度が満たす条件式は 1 式のみとなり、債券ポートフォリオ内の調整は不定となる。そもそも、こうした証券投資の最適ポートフォリオ問題では、危険証券の投資対象は株式、債券等、問題により様々であるにも拘わらず、安全証券は投資対象に必ず含まれている。これは、安全証券が効率的フロンティアに十分に接近するには不可欠との認識から来ていると判断される。しかし、楠田 (2013c) のモデルでは、従来モデルとは異なり、全満期の債券を投資対象としているため、短期債券群を一つの投資対象に設定すれば、これは安全証券を代替するので、安全証券を敢えてポートフォリオに組み込む必要性は無いと考えられる。

後者の問題に関しては、楠田 (2013c) におけるリスクの市場価格一定の 2 ファクター・モデルは「完備アフィン・モデル」となっているが、この場合、リスクの市場価格を状態変数のアフィン関数とした「本質的アフィン・モデル」に一般化しても、解析的取扱い易さは或る程度維持されることが示されている。

本稿では、楠田 (2013c) の枠組みにおいて投資対象から安全証券を外し、代わりに株式指数を組み入れ、リスクの市場価格を状態変数である短期金利と平均短期金利のアフィン関数に一般化した「本質的アフィン・モデル」を仮定して、相似拡大的頑健効用を最大化する株式指数と全満期債券の最適ポートフォリオの近似解析解の導出を試みる。

主要な結果は以下の通りである。先ず、理論的帰結通り、債券の最適投資比率の満たす条件が 2 式となっており、短期債券群と中長期債券群の最適投資比率を決定出来る。しかし、同近似解析解では、楠田 (2013c) の結果と同様に、値関数を構成する、短期金利・平均短期金利の 2 変数関数の 7 係数は 7 元連立非線形方程式の数値解として陰伏的にしか与えられてない。このとき、楠田 (2013c) と同様に、金利モデルの係数に妥当と判断される制約を仮定しても、リスクの市場価格が短期金利、或いは平均金利に依存することが障害となり、上記数値解法負担を軽減する近似解析解を導くことは困難であることが判明する。そこで、金利モデルの係数への制約に加え、リスクの市場価格一定の「完備アフィン・モデル」を改めて仮定することによって、上記数値解法負担が 1 変数方程式の数値解導出にまで軽減された近似解析解を導いている。

本稿の次章以降の構成は次の通りである。2 章では、2 ファクター・本質的アフィン・モデルと相似拡大的頑健効用を紹介し、相似拡大的頑健効用下の消費と株式・債券投資の最適化問題の最適条件である Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式を導出する。3 章では、同 HJB 方程式の解である値関数を構成する金利・平均金利の 2 変数関数の偏微分方程式を Campbell and Viceira (2002)、楠田 (2013a) 等の技法により近似し、近似解析解を導出する。4 章では、完備アフィン・モデルと金利モデルの係数間の制約を仮定し、数値解

法負担が低く、実証分析が容易な近似解析解を導出する。

2 頑健効用と 2 ファクター・本質的アフィン・モデルに基づく消費と株式・債券投資の多期間最適化

本章では、ナイトの不確実性下で頑健効用と 2 ファクター・「本質的アフィン・モデル」に基づく消費と株式・債券投資の多期間最適化問題の確率制御による解法を示す。先ず、2 ファクター・本質的アフィン・モデル等の環境を説明した後、Anderson, Hansen, and Sargent (2003) が提案する頑健効用と頑健効用下の確率制御の解法を紹介する。そして、同効用下の消費と株式・債券投資の多期間最適化問題に対する最適条件である HJB 方程式を示す。

2.1 環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。投資家共通の尤も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデル化されている。ここで、$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は 2 次元標準ブラウン運動 z によって生成される自然なフィルター付けである。確率測度 P の下での期待作用素を E と表記する。

一種類の消費財、株式指数、割引債が任意の時点で市場で取引されている。割引債は任意の時点で発行されており、発行時点の満期までの期間は $\bar{\tau}$ とする。株価指数の価格を S、満期 T の割引債の価格を B^T と表記する。消費財空間は、消費率過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty \quad a.s.$ を満たす非負値適合的過程の空間とする。

金利の変動過程については、安全証券と 1 種類の債券のポートフォリオ問題を考察している Campbell and Viceira (2002) や楠田 (2013a) では、瞬間的スポット・レートを対象に金利の平均回帰傾向を織り込んだ 1 ファクター・モデルであるバシチェック・モデル (Vasiceck (1997)) を仮定している。しかし、1 ファクター・モデルでは、満期の異なる債券の収益率は完全相関するため、本稿のような全満期の債券のポートフォリオ問題の考察には適していない。そもそも、金利のイールド・カーブの変動については、主成分分析から、長短金利の平行移動 (parallel shift)、捩れ (twist)、歪み (curvature) の 3 成分で 99%以上が説明できるとされている。特に、平行移動成分が 80〜90%、これに捩れ成分を加えると、90〜95%の説明力を持つとされている。そこで、バシチェック・モデルにおいて定数と仮定されている平均金利の変動を織り込んで満期の異なる債券間の相関の表現を企図した「2 ファクター・ハル・ホワイト・モデル」(Hull and White (1994)) を仮定する。

仮定 1. 瞬間的スポット・レート r は次の過程に従う。

$$dr_t = \kappa(\bar{r}_t - r_t)\,dt - \sigma\,dz_{1t} \tag{2.1}$$

$$d\bar{r}_t = \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t)\,dt - \sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\,\bar{\sigma}\,dz_{it} \tag{2.2}$$

ここで、κ は瞬間的スポット・レートの平均金利過程 $\bar{r}_t$ への回帰速度、σ は拡散係数、$\bar{\kappa}$ は平均金利過程の平均金利 $\bar{r}$ への回帰速度、$\bar{\sigma}$ は拡散係数をそれぞれ表す正の定数である。また、$\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2 \in [-1, 1]$ で、$\bar{\rho}_1$ は金利変化 dr_t と平均金利変化 $d\bar{r}_t$ の相関を表しており、$\bar{\rho}_1^2 + \bar{\rho}_2^2 = 1$ を満たしている。

以下では、瞬間的スポット・レート r_t を「短期金利」、平均金利過程 br_t を「平均短期金利」、平均金利 $\bar{r}$ を「長期平均短期金利」と呼ぶ。

上記モデルは、状態変数 $(r_t, \bar{r}_t)$ の「アフィン・モデル」（Duffie and Kan (1996)）に包含される。リスクの市場価格については、定数と仮定されたモデルは「完備アフィン・モデル（completely affine models）」、状態変数のアフィン関数と仮定されたモデルは「本質的アフィン・モデル（essentially affine models）」とそれぞれ呼ばれている（Duffee (2004)）。本稿では、「本質的アフィン・モデル」を仮定することから出発する。また、株式指数の収益率のボラティリティは一定と仮定する。

仮定 2.

1. リスクの市場価格 λ は短期金利と平均短期金利のアフィン関数である。

$$\lambda_{it} = \lambda_i + \lambda_{i1} r_t + \lambda_{i2}\bar{r}_t \qquad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

ここで、$\lambda_i, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ は定数である。

2. 株式指数の収益率のボラティリティは v である。ここで、v は正の定数である。

2.2 証券価格過程と予算制約式

補題 1. 仮定 *1*・*2* の下、株式指数 S と満期 T の割引債の無裁定価格 B^T は次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2}\rho_i v \lambda_{it}\right)dt + \sum_{i=1}^{2}\rho_i v\,dz_{it} \tag{2.4}$$

$$\frac{dB_t^T}{B_t^T} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2}\sigma_i(\tau)\lambda_{it}\right)dt + \sum_{i=1}^{2}\sigma_i(\tau)\,dz_{it} \tag{2.5}$$

ここで、$\rho_1, \rho_2 \in [-1, 1]$ で、ρ_1 は短期金利変化 dr_t と株式指数 S_t の収益率の相関を表しており、$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1$ を満たしている。$\tau = T - t$ で、

$$\begin{pmatrix}\sigma_1(\tau)\\ \sigma_2(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma & \bar{\rho}_1\bar{\sigma}\\ 0 & \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1(t)\\ b_2(t)\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

ここで、(b_1, b_2) は次の非斉次の定数係数線形連立常微分方程式の境界値問題の解析解である。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa + \sigma\lambda_{11} & \bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i1} \\ -\kappa & \bar{\kappa} + \bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

境界条件：$b_1(T) = b_2(T) = 0$

証明. 補論 A.1 参照。 □

以下では、$v_i = \rho v_i$ と略記する。

投資家は初期時点の短期金利 r_0 と平均短期金利 $\bar{r}_0$ を所与として与えられた富 W_0 を株式指数と全満期の債券を対象に投資することによって効用を最大化する問題を解く。通常は富に対する証券の投資比率を最適化するが、本稿では、任意の満期の債券を投資対象としているため富に対する債券投資比率密度過程 $\varphi_t(\tau)$ を最適化する。ここで、τ は債券の満期までの期間を表している。尚、このとき、或る特定の満期の債券の投資比率自体を非零とする投資を認めるため、許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする。また、以下では、全債券への投資比率を Φ と表記するが、

$$\Phi_t = \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)d\tau \tag{2.8}$$

であることを予め留意されたい。

補題 2. 債券の投資比率密度過程 φ と消費率過程 c を所与とする。このとき、仮定 *1*・*2* の下、富過程 W は次の予算制約式を満たす。

$$\begin{aligned} dW_t = &\left\{\left(r_t + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau + (1-\Phi_t)v_i\right)\lambda_{it}\right)W_t - c_t\right\}dt \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau + (1-\Phi_t)v_i\right)W_t dz_{it} \end{aligned} \tag{2.9}$$

証明. 補論 A.2 参照。 □

留意点 1. 予算制約式 *(2.9)* は、安全証券と全満期債券を投資対象とする場合の予算制約式における

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau \tag{2.10}$$

の項が

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau + (1-\Phi_t)v_i \tag{2.11}$$

$(i = 1, 2)$ に置き換わっているに過ぎない。*(2.11)* は *2* 次元ブラウン運動の各次元における全証券のボラティリティの投資比率密度で重み付けられた加重

平均である。かかる観点から *(2.10)* を改めて見直すと、安全証券のボラティリティは *0* なので、*(2.10)* も全証券のボラティリティの投資比率密度で重み付けられた加重平均にほかならない。すなわち、本予算制約式と楠田 *(2013c)* で導出されている安全証券と全満期債券を投資対象とする場合の予算制約式は本質的に同一の構造である。

以下では、適宜、上記加重平均を次の記号で略記する。

$$\Psi_{it} = \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau + (1-\Phi_t)v_i \qquad i = 1, 2 \tag{2.12}$$

2.3 頑健効用

ナイトの不確実性下、「頑健効用」(Anderson, Hansen, and Sargent (2003)) を所持する投資家は現実の確率測度として P を尤も有り得べき確率測度（以下、「参考確率測度」、或いは「参考確率」と呼ぶ）と認識しているが、参考確率測度 P 以外の確率測度である可能性を否定出来ない。そこで、彼女或いは彼は参考確率測度 P 以外の確率測度の候補として、全ての「等価確率測度」[1]の集合 $\mathbb{P}$ を想定する。そして、彼女或いは彼は各消費計画に対し最悪の場合の等価確率測度を想定して、$\mathbb{P}$ 上で「期待効用汎関数」を最小化する「最悪確率」を求める。この際、参考確率 P を尤も有り得べき確率と認識している以上、参考確率 P と大幅に乖離する最悪確率を想定することは慎重を通り越して杞憂の誹りを免れない。そこで、参考確率 P との乖離に損失を与える P に関する最悪確率の相対エントロピーの割引現在価値を期待効用汎関数に付加した汎関数を最小化対象とする。ここで、P に関する最悪確率の相対エントロピーの割引現在価値は次式で定義されている。

$$\tilde{\mathcal{R}}^x = E^x \left[\beta \int_0^\infty e^{-\beta t} \log \Lambda_t^x \, dt \right] \tag{2.14}$$

本章では、投資家が次式で表される頑健効用汎関数を所持すると仮定する。

$$\begin{aligned} u(c) &= \inf_{P^x \in \mathbb{P}} E^x \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \, dt \right] + \frac{1}{\theta} \tilde{\mathcal{R}}^x \qquad \text{if } \gamma \neq 1 \qquad (2.15) \\ &= \inf_{P^x \in \mathbb{P}} E^x \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \log c_t \, dt \right] + \frac{1}{\theta} \tilde{\mathcal{R}}^x \qquad \text{if } \gamma = 1 \end{aligned}$$

ここで、β は割引率、γ は相対的危険回避度、θ は「曖昧性の回避度合」を表す正の定数である。

[1] $\tilde{P}$ が P の等価確率測度とは、両測度の零集合が一致している場合、すなわち、$P(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A) = 0$ が成立している場合を言う。尚、任意の等価確率測度 P^x は、ギルサノフの定理により、2 乗可積分な或る適合的過程 x により、ラドン・ニコディム微分として、次式のように表現される。

$$\frac{dP^x}{dP} = \exp\left(\int_0^\infty x_t dz_t - \frac{1}{2} \int_0^\infty x_t^2 dt \right) \tag{2.13}$$

留意点 2. 係数 $\theta = 0_+$ のとき、第 *2* 項が無限大となるため最小化の結果導出される最悪確率は参考確率 P となり、効用汎関数は相対的危険回避度 γ の *CRRA (Constant Relative Risk Aversion)* 期待効用汎関数となる。θ が増加するにつれて最小化の結果導出される相対エントロピーは大きくなり、参考確率と最悪確率の乖離は増大する。これは、θ が大きくなるにつれて、投資家がより「曖昧性回避的 *(umbiguity averse)*」（*Cheng and Epstein (2002)*）となることを示している。[2]すなわち、θ は曖昧性回避の度合いを示している。また、$\theta = 0_+$ の場合を以下では「曖昧性中立的」な場合と呼ぶ。

2.4 頑健効用下の確率制御

予算制約式 (2.9) を満たす消費財・投資比率過程 (c, φ) を初期状態 $Y_0 = (W_0, r_0, \bar{r}_0)$ に対する許容的制御と呼び、許容的制御の集合を $\mathcal{C}(Y_0)$ と表記する。このとき、最適投資問題は次式で定義される値関数 $V(Y_0)$ の解析解を求める問題となる。

$$V(Y_0) = \sup_{(c,\varphi)\in\mathcal{C}(Y_0)} u(c) \tag{2.16}$$

頑健効用下での本問題 (2.16) の確率制御による解法を、曖昧性中立的な場合の本問題の確率制御による解法から説き起こす。

頑健効用 (2.15) において曖昧性中立的で相対的危険回避度が γ の CRRA 期待効用となっている場合、本問題 (2.16) は次の通常の Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式（以下、「HJB 方程式」）を解く問題に帰着される。

$$\sup_{\varphi}\left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(W_t, r_t, \bar{r}_t) - \beta V(W_t, r_t, \bar{r}_t) - \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = 0 \tag{2.17}$$

s.t. 横断条件

$$\lim_{T\to\infty} E[\, e^{-\beta T} V(W_T, r_T)\,] = 0 \tag{2.18}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(W_t, r_t, \bar{r}_t) = &\left\{\left(r_t + \sum_{i=1}^{2}\Psi_i\lambda_{it}\right)W_t - c_t\right\}V_W + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Psi_i^2 W_t^2 V_{WW}\\ &- \Psi_1\sigma\, W_t V_{Wr} - \sum_{i=1}^{2}\Psi_i\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\, W_t V_{W\bar{r}}\\ &+ \kappa(\bar{r}_t - r_t)V_r + \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t)V_{\bar{r}} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}V_{r\bar{r}}\end{aligned} \tag{2.19}$$

Anderson, Hansen, and Sargent (2003) は、頑健効用における最悪確率測度導出が最悪確率測度への測度変換項 $g(Y_t) = (g_1(Y_t), g_2(Y_t))$ を状態変数の

[2]係数 θ が大きくなるにつれて、投資家がより曖昧性回避的となることはジャンプ拡散情報の下でも示されている（例えば、Kusuda (2006) を参照）。

確率微分方程式に次のように加えた後、

$$dW_t = \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \Psi_i \lambda_{it} \right) W_t - c_t + \sum_{i=1}^{2} \Psi_i \, W_t \, g_i(Y_t) \right\} dt + \sum_{i=1}^{2} \Psi_i W_t \, dz_{it}$$

$$dr_t = \Big(\kappa \big(\bar{r}_t - r_t \big) - \sigma g_1(Y_t) \Big) dt - \sigma \, dz_{1t}$$

$$d\bar{r}_t = \left(\bar{\kappa} \big(\bar{r} - \bar{r}_t \big) - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \bar{\sigma} g_i(Y_t) \right) dt - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \bar{\sigma} \, dz_{it}$$

次式で表される最小化を行うことと等価であることを示している。

$$\inf_g \Bigg[\mathcal{D}^{(c,\varphi)} V - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{2\theta} \| g(Y_t) \|^2 + \Big(\Psi_1 W_t V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \Big) g_1(Y_t) + \Big(\Psi_2 W_t V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \Big) g_2(Y_t) \Bigg]$$

従って、頑健効用における HJB 方程式は次式のように表される。

$$\sup_{(c,\varphi)} \inf_g \Bigg[\mathcal{D}^{(c,\varphi)} V - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{2\theta} \| g \|^2 + \Big(\Psi_1 W_t V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \Big) g_1 + \Big(\Psi_2 W_t V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \Big) g_2 \Bigg] = 0 \quad (2.20)$$

s.t. (2.18)

先ず、最小化の 1 階の条件より、最悪確率測度（変換項）が次のように決定される。

$$\begin{pmatrix} g_1^* \\ g_2^* \end{pmatrix} = -\theta \begin{pmatrix} \Psi_1 W_t V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \\ \Psi_2 W_t V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

最悪確率測度変換項 g^* を HJB 方程式に代入すると、次式を得る。

$$\sup_{(c,\varphi)} \Bigg[\mathcal{D}^{(c,\varphi)} V - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\theta}{2} \left\{ \left(\Psi_1 W_t V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \right)^2 + \left(\Psi_2 W_t V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \right)^2 \right\} \Bigg] = 0 \quad (2.22)$$

3 相似拡大的頑健効用下の消費と株式・債券投資の多期間最適化

本章では、Maenhout (2004) が提案する相似拡大的頑健効用と同効用下における消費と投資の多期間最適化問題に対する HJB 方程式と消費・投資の最適条件から値関数の偏微分方程式を導出し、値関数の関数形を推測する。そ

して、推測された値関数を構成する短期金利・平均短期金利の 2 変数関数の非斉次の偏微分方程式を導出し、非斉次項を Campbell and Viceira (2002)、楠田 (2013a) 等の技法で近似して、近似解析解を導出する。最後に、近似最適ポートフォリオの代表的具体例を紹介する。

3.1 相似拡大的頑健効用下の値関数の偏微分方程式

頑健効用において曖昧性の回避度合を表す θ は一定で状態に独立である。Maenhout (2004) は曖昧性の回避度合を状態変数 $Y_t = (W_t, r_t, \bar{r}_t)$ に依存出来るように $\theta = \theta(Y_t)$ に拡張した「一般化頑健効用族」を提示しているが、同効用は効用汎関数が備えるべき望ましい性質とされる「相似拡大性 (homotheticity)」を一般に有していない。そこで、Maenhout (2004) は $\theta(Y_t)$ を次のように特定化した「相似拡大的頑健効用 (homoethetic robust utility)」を提唱している。

$$\theta(Y_t) = \frac{\delta}{(1-\gamma)V(Y_t)} \tag{3.1}$$

ここで、δ は曖昧性の回避度合を表す正の定数である。

以下では、投資家の効用汎関数が相似拡大的頑健効用と仮定する。

仮定 3. *投資家の効用汎関数は HJB 方程式 (2.22) における θ を (3.1) 式で定義される $\theta(Y_t)$ で置き換えた相似拡大的頑健効用である。*

このとき、HJB 方程式 (2.22) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}&\sup_{(c,\varphi)}\Bigg[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\\&-\frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\left\{\left(\varPsi_1 W_t V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\right)^2 + \left(\varPsi_2 W_t V_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\right)^2\right\}\Bigg] = 0\end{aligned} \tag{3.2}$$

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から最適消費・投資比率密度 (c^*, φ^*) は次式を満たしている。

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau + (1-\varPhi_t^*)v_1 &= -\frac{V_W}{W_t\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\lambda_{1t}\\&+\frac{V_{Wr} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V}}{W_t\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\sigma + \frac{V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{W_t\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\bar{\rho}_1\bar{\sigma}\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau + (1-\Phi_t^*)v_2 = -\frac{V_W}{W_t\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\lambda_{2t} + \frac{V_{W\bar{r}}-\frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{W_t\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\bar{\rho}_2\bar{\sigma} \quad (3.5)$$

最適消費 (3.3) 式と最適投資条件 (3.4)(3.5) 式を HJB 方程式 (3.2) に代入して整理すると、次の値関数 V に関する偏微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}V_{r\bar{r}} - \frac{1}{2}\frac{q_1^2(Y_1)}{p(Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{q_2^2(Y_1)}{p(Y_t)} + \frac{\delta}{2(\gamma-1)V}\left(\sigma^2 V_r^2 + \bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}}^2 + 2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}V_r V_{\bar{r}}\right) + r_t W_t V_W + \kappa(\bar{r}_t - r_t)V_r + \kappa(\bar{r}-\bar{r}_t)V_{\bar{r}} - \beta V + \frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 0 \quad (3.6)$$

ここで、

$$p(Y_t) = W_t^2\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right) \quad (3.7)$$

$$q_1(Y_t) = W_t\left\{\lambda_1 V_W - \sigma\left(V_{Wr} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V}\right) - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}\left(V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}\right)\right\} \quad (3.8)$$

$$q_2(Y_t) = W_t\left\{\lambda_2 V_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\left(V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V}\right)\right\} \quad (3.9)$$

上記偏微分方程式から値関数が次の関数形であることが推測される。

$$V(W_t, r_t, \bar{r}_t) = \left(H(r_t,\bar{r}_t)\right)^{\gamma}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (3.10)$$

値関数 V に偏微分を施し、(3.4)(3.5) 式に代入し、値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.6) に代入すると、次の命題を得る。

命題 1. 仮定 *1・2・3* の下、本問題 *(2.16)* の最適投資比率密度 φ^* は *(3.11)(3.12)* 式を満たしており、値関数 V を構成する関数 $H(r_t,\bar{r}_t)$ は *2* 階の偏微分方程式 *(3.13)* の解である。

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau + (1-\Phi_t)v_1 = \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{1t} + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\sigma\frac{H_r}{H} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau + (1-\Phi_t)v_2 = \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{2t} + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \quad (3.12)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right)+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right)\\
&\quad+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}\\
&+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\lambda_{1t}\right)\left(\frac{H_r}{H}\right)+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_{it}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\\
&\qquad-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\|\lambda_t\|^2+\frac{\gamma-1}{\gamma}r_t+\frac{\beta}{\gamma}\right)+\left(\frac{1}{H}\right)=0 \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

証明. 補論 A.3 参照。 □

3.2 値関数を構成する金利関数の偏微分方程式の非斉次項近似

偏微分方程式 (3.13) は消費・効用過程に起因する非斉次項 $1/H$ を含んでおり、解析解の導出を困難にしている。そこで、Campbell and Viceira (2002) が CRRA 効用と 1 ファクター金利モデルを仮定し、消費と 2 証券（安全証券と 1 債券）投資の最適化問題で導出した金利関数の常微分方程式の近似解析解を導出する際に用いた技法に楠田 (2013a) の技法等を援用して同非斉次項を対数線形近似する。

先ず、(3.3) 式と値関数 (3.10) から $1/H(r_t,\bar{r}_t)=c_t/W_t$ が成立していることに留意し、$1/H(r_t,\bar{r}_t)$ を次のように $\lim_{t\to\infty}E[\log c_t-\log W_t]$ の周りで[3]対数線形近似する。

$$
\frac{1}{H(r_t,\bar{r}_t)}\approx h_0-h_1\log H(r_t,\bar{r}_t) \qquad (3.14)
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
h_0 &= h_1(1-\log h_1) \qquad (3.15)\\
h_1 &= \exp\Big(\lim_{t\to\infty}E\Big[\log\Big(\frac{c_t}{W_t}\Big)\Big]\Big) \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

(3.14) 式を偏微分方程式 (3.13) の非斉次項 $1/H$ に代入すると、次の近似偏微分方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right)+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right)\\
&\quad+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}\\
&+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\lambda_{1t}\right)\left(\frac{H_r}{H}\right)+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_{it}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\\
&\qquad-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\|\lambda_t\|^2+\frac{(\gamma-1)}{\gamma}r_t+\frac{\beta}{\gamma}-h_0\right)-h_1\log H=0 \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

[3] Campbell and Viceira (2002) は $E[\log c_t-\log W_t]$ の周りで対数線形近似しているが、この場合、$E[\log c_t-\log W_t]$ は r と r_t に依存する。そこで、一定値をとる $\lim_{t\to\infty}E[\log c_t-\log W_t]$ の周りで対数線形近似を行っている。

近似偏微分方程式 (3.17) の解が次式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される。

$$H(r_t, \bar{r}_t) = \exp\left(a_0 + a_1 r_t + a_2 \bar{r}_t + \frac{1}{2} a_{11} r_t^2 + a_{12} r_t \bar{r}_t + \frac{1}{2} a_{22} \bar{r}_t^2\right) \tag{3.18}$$

このとき、

$$h_1 = \lim_{t\to\infty}\left[-a_0 + a_1 E[r_t] + a_2 E[\bar{r}_t] + \frac{1}{2} a_{11} E[r_t^2] + a_{12} E[r_t \bar{r}_t] + \frac{1}{2} a_{22} E[\bar{r}_t^2]\right] \tag{3.19}$$

平均短期金利 $\bar{r}_t$ は線形確率微分方程式 (2.2) の解であり、次のように解ける。

$$\bar{r}_t = \bar{r} + (\bar{r}_0 - \bar{r})e^{-\bar{\kappa}t} - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \bar{\sigma} \int_0^t e^{\bar{\kappa}(s-t)} dz_{is} \tag{3.20}$$

短期金利 r_t は確率微分方程式 (2.1) の $\bar{r}_t$ を $\bar{r}$ で近似すると、線形確率微分方程式の解となり、次のように近似出来る。

$$r_t \approx \bar{r} + (r_0 - \bar{r})e^{-\kappa t} - \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dz_{1s} \tag{3.21}$$

(3.20) 式と (3.21) の近似式を用いて (3.19) 式を計算した h_1 の近似値を $\tilde{h}_1$ と定義する。このとき、$\tilde{h}_1$ は次のように算出される。

$$\tilde{h}_1 = -a_0 - \bar{r}(a_1 + a_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa} + \bar{r}^2\right) a_{11} - \left(\frac{\bar{\rho}_1 \sigma \bar{\sigma}}{\kappa + \bar{\kappa}} + \bar{r}^2\right) a_{12} - \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\sigma}^2}{2\bar{\kappa}} + \bar{r}^2\right) a_{22} \tag{3.22}$$

また、上式を用いて (3.15) 式を計算した h_0 の近似値を $\tilde{h}_0$ と定義する。すなわち、

$$\tilde{h}_0 = \tilde{h}_1(1 - \log \tilde{h}_1) \tag{3.23}$$

近似値 $(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1)$ を用いた近似偏微分方程式 (3.17) の解に基づく近似値関数、近似最適消費、近似最適投資比率密度をそれぞれ $\tilde{V}, \tilde{c}^*, \tilde{\varphi}^*$ と定義する。

3.3 近似解析解

金利・平均金利の 2 変数関数 (3.18) に偏微分を施し、近似偏微分方程式 (3.17) に代入すると、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\Big(a_{11}+\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)^2\Big)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\Big(a_{22}+\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)^2\Big)\\
&\qquad+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\Big(a_{12}+\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\Big)\\
&+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big\{\sigma^2\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)^2+\bar{\sigma}^2\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)^2\\
&\qquad+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\Big\}\\
&+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\ \big(\lambda_1+\lambda_{11}r_t+\lambda_{12}\bar{r}_t\big)\right)\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\\
&+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\right)\\
&\qquad-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)^2+\frac{\gamma-1}{\gamma}r_t+\frac{\beta}{\gamma}-\tilde{h}_0\right)\\
&\qquad-\tilde{h}_1\left(a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right)=0 \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

上式は $(r_t,\bar{r}_t,r_t^2,r_t\bar{r}_t,\bar{r}_t^2)$ に関する恒等式であるから、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22})$ に関する 6 元連立非線形方程式が得られる。(3.23) 式を (3.24) に代入し $\tilde{h}_0$ を消去した後、同 6 元連立方程式と (3.22) 式を結合した 7 元連立非線形方程式を数値解法によって解けば、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22},\tilde{h}_1)$ が算出される。

このとき、次の命題を得る。

命題 2. 仮定 *1・2・3* の下、本問題 *(2.16)* の近似値関数と近似最適消費はそれぞれ *(3.25)* 式と *(3.26)* 式で表され、近似最適投資比率密度は *(3.27)(3.28)* 式を満たしている。

$$
\tilde{V}(W_t,r_t,\bar{r}_t)=\exp\left[\gamma\left\{a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \qquad (3.25)
$$

$$
\tilde{c}_t^* = \exp\left[-a_0-a_1r_t-a_2\bar{r}_t-\frac{1}{2}a_{11}r_t^2-a_{12}r_t\bar{r}_t-\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right]W_t \qquad (3.26)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\tilde{\varphi}_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau+(1-\tilde{\Phi}_t)v_1=\frac{1}{\gamma+\delta}\,\lambda_{1t}+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\\
&\times\left(-\Big(\sigma a_1+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_2\Big)-\Big(\sigma a_{11}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{12}\Big)r_t-\Big(\sigma a_{12}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{22}\Big)\bar{r}_t\right) \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\tilde{\varphi}_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau+(1-\tilde{\Phi}_t)v_2=\frac{1}{\gamma+\delta}\,\lambda_{2t}+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\\
&\qquad\times\left(-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\Big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\Big)\right) \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

留意点 3. 近似最適投資比率密度の条件式 *(3.27)(3.28)* は、この種のやや複雑なポートフォリオ最適化問題で示されている多くの結果と同様に、モデルの係数と最適投資比率の関数関係が不明確なほか、金利関数の *7* 係数 $(a_0, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}, \tilde{h}_1)$ が *7* 元連立非線形方程式の数値解として陰伏的にしか与えられてないため、当該最適投資比率を用いて投資家の相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」を推定するなどの実証分析が困難である。そこで、金利関数の *7* 係数の近似解析解を導出するため、楠田 *(2013c)* と同様に金利モデルのパラメータ間に制約を付加しても、補論 *A.4* の際の近似解析解導出過程を分析すれば分かる通り、リスクの市場価格が短期金利、或いは平均短期金利に依存すると、近似解析解導出は困難である。次章では、金利モデルの係数間の制約に加え、リスクの市場価格一定の完備アフィン・モデルを改めて仮定することにより、上記関数関係が明確で、且つ数値解法負担が軽く実証分析の容易な近似解析解を導出する。その前に近似最適ポートフォリオの代表的具体例をみておく。

3.4 近似最適ポートフォリオの代表的具体例

近似最適ポートフォリオの代表的な具体例を二つ示す。以下では、(3.27) 式と (3.28) 式の右辺の項をそれぞれ q_{1t}, q_{2t} とする。

3.4.1 2 債券

先ず、投資家が満期までの期間が固定された異なる 2 種類の債券 (τ_1, τ_2) のみに投資する場合を考察する。2 債券の最適投資比率を (Φ_1^*, Φ_2^*) とすると、(3.27)(3.28) 式より、2 債券の近似最適投資比率は次式を満たしている。

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(\tau_1) - v_1 & \sigma_1(\tau_2) - v_1 \\ \sigma_2(\tau_1) - v_2 & \sigma_2(\tau_2) - v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{1t}^* \\ \Phi_{2t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1t} - v_1 \\ q_{2t} - v_2 \end{pmatrix}$$

従って、この場合の最適投資比率は次のように求められる。

$$\begin{pmatrix} \Phi_{1t}^* \\ \Phi_{2t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(\tau_1) - v_1 & \sigma_1(\tau_2) - v_1 \\ \sigma_2(\tau_1) - v_2 & \sigma_2(\tau_2) - v_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_{1t} - v_1 \\ q_{2t} - v_2 \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \Phi_{1t}^* &= D^{-1}\Big(\Big(\sigma_2(\tau_2) - v_2\Big)\Big(q_{1t} - v_1\Big) - \Big(\sigma_1(\tau_2) - v_1\Big)\Big(q_{2t} - v_2\Big)\Big) \\ \Phi_{2t}^* &= D^{-1}\Big(-\Big(\sigma_2(\tau_1) - v_2\Big)\Big(q_{1t} - v_1\Big) + \Big(\sigma_1(\tau_1) - v_1\Big)\Big(q_{2t} - v_2\Big)\Big) \end{aligned}$$

ここで、

$$D = \Big(\sigma_1(\tau_1) - v_1\Big)\Big(\sigma_2(\tau_2) - v_2\Big) - \Big(\sigma_1(\tau_2) - v_1\Big)\Big(\sigma_2(\tau_1) - v_2\Big)$$

3.4.2　2 債券群

次に、投資家が満期の異なる債券を短期債券群 $(0, \tau_M]$ と中長期債券群 $(\tau_M, \bar{\tau}]$ の二つに分類し、各債券群内の投資比率密度は一様分布とする投資を行う場合を考察する。2 債券群の最適投資比率密度を $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ とすると、(3.27)(3.28) 式より、2 債券の近似最適投資比率は次式を満たしている。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_M}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_M}^{\bar{\tau}}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau \\ \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_M}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_M}^{\bar{\tau}}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1t}^* \\ \varphi_{2t}^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1t}-v_1 \\ q_{2t}-v_2 \end{pmatrix}$$

従って、この場合の最適投資比率密度は次のように求められる。

$$\begin{pmatrix}\varphi_{1t}^* \\ \varphi_{2t}^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_M}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_M}^{\bar{\tau}}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau \\ \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_M}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_M}^{\bar{\tau}}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} q_{1t}-v_1 \\ q_{2t}-v_2 \end{pmatrix}$$

よって、各債券群への投資比率は次を満たしている。

$$\begin{aligned}\varphi_{1t}^*\tau_M = D^{-1}\Bigg(&\int_{\tau_M}^{\bar{\tau}}\Big(\sigma_2(\tau)-v_2\Big)d\tau\Big(q_{1t}-v_1\Big) \\ &-\int_{\tau_M}^{\bar{\tau}}\Big(\sigma_1(\tau)-v_1\Big)d\tau\Big(q_{2t}-v_2\Big)\Bigg)\frac{\tau_M}{\bar{\tau}} \\ \varphi_{2t}^*(\bar{\tau}-\tau_M) = D^{-1}\Bigg(&-\int_0^{\tau_M}\Big(\sigma_2(\tau)-v_2\Big)d\tau\Big(q_{1t}-v_1\Big) \\ &+\int_0^{\tau_M}\Big(\sigma_1(\tau)-v_1\Big)d\tau\Big(q_{2t}-v_2\Big)\Bigg)\frac{\bar{\tau}-\tau_M}{\bar{\tau}}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}D = &\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_M}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau\right)\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_M}^{\bar{\tau}}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau\right) \\ &-\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_M}^{\bar{\tau}}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau\right)\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_M}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau\right)\end{aligned}$$

4　完備アフィン・モデルと金利関連係数間制約下の近似解析解

本章では、リスクの市場価格を一定とした「完備アフィン・モデル」を仮定し、金利モデルの係数間の関係性に制約を付加することにより、モデルの諸係数と最適投資比率の関数関係が明確で、且つ数値解法負担が非常に軽く実証分析の容易な近似解析解を導出する。

4.1 追加的仮定

リスクの市場価格を一定とした「完備アフィン・モデル」を仮定する。また、平均金利は金利に比べ平均回帰速度と分散が有意に小さいとみられるほか、金利・平均金利間の相関も相当程度低いとみられることから、次の仮定を置く。

仮定 4. *1.* リスクの市場価格における仮定 *2* において、$\lambda_{i1} = \lambda_{i2} = 0$ $(i = 1, 2)$、すなわち、$\lambda_{it} = \lambda_i$ である。

2. 金利モデルの係数 $\sigma, \bar{\sigma}, \bar{\rho}_1, \kappa, \bar{\kappa}$ の間に次の関係式が成立している。

$$\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2,\ \bar{\rho}_1 \frac{\bar{\sigma}}{\sigma},\ \left(\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)^2 \approx 0 \tag{4.1}$$

仮定 4.1 の $\lambda_{it} = \lambda_i$ を (3.24) 式に代入し、$(r_t, \bar{r}_t, r_t^2, r_t\bar{r}_t, \bar{r}_t^2)$ の各係数と定数項を整理すると、次の連立方程式を得る。

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2 a_{11}^2 + 2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{11}a_{12} + \bar{\sigma}^2 a_{12}^2\Big) - (\tilde{h}_1 + 2\kappa)a_{11} = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\bar{\sigma}^2 a_{22}^2 + 2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{12}a_{22} + \sigma^2 a_{12}^2\Big) - (\tilde{h}_1 + 2\bar{\kappa})a_{22} + 2\kappa a_{12} = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2 a_{11}a_{12} + \bar{\sigma}^2 a_{12}a_{22} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_{11}a_{22} + a_{12}^2)\Big) + \kappa a_{11} - (\tilde{h}_1 + \kappa + \bar{\kappa})a_{12} = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2 a_1 a_{11} + \bar{\sigma}^2 a_2 a_{12} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_1 a_{12} + a_2 a_{11})\Big) + \frac{(\gamma+\delta-1)\sigma\lambda_1}{\gamma+\delta}a_{11} + \left(\frac{(\gamma+\delta-1)\sum_{i=1}^2 \bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i}{\gamma+\delta} + \bar{\kappa}\bar{r}\right)a_{12} - (\tilde{h}_1 + \kappa)a_1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2 a_1 a_{12} + \bar{\sigma}^2 a_2 a_{22} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_1 a_{22} + a_2 a_{12})\Big) + \frac{(\gamma+\delta-1)\sigma\lambda_1}{\gamma+\delta}a_{12} + \left(\frac{(\gamma+\delta-1)\sum_{i=1}^2 \bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i}{\gamma+\delta} + \bar{\kappa}\bar{r}\right)a_{22} + \kappa a_1 - (\tilde{h}_1 + \bar{\kappa})a_2 = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}a_{11} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}a_{22} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{12} + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2 a_1^2 + \bar{\sigma}^2 a_2^2\Big) + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\bar{\rho}_i\sigma\bar{\sigma}a_1 a_2 + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\left(\lambda_1 a_1 + \sum_{i=1}^2 \bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i a_2\right) + \frac{1-\gamma}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^2 \lambda_i^2 - \beta\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1 a_0 = 0 \tag{4.7}$$

上記連立方程式に仮定 2.2 の近似式 (4.1) を適用すると、(4.2) 式より、$a_{11} \approx 0$、或いは、

$$a_{11} \approx \frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)} \frac{\tilde{h}_1 + 2\kappa}{\sigma^2} \tag{4.8}$$

が得られる。以下では、$a_{11} \approx 0$ に対応する近似解を「低次の近似解」、(4.8) 式に対応する近似解を「高次の近似解」と呼ぶ。

4.2 低次と高次の近似解析解

4.2.1 低次の近似解

低次の近似解については、$a_{11} \approx 0$ を (4.4)(4.3) 式に代入すると、$a_{12}, a_{22} \approx 0$ が得られる。これらを (4.5)(4.6) 式に代入すると、

$$a_1 \approx \frac{1-\gamma}{\gamma(\tilde{h}_1+\kappa)} \tag{4.9}$$

$$a_2 \approx \frac{(1-\gamma)\kappa}{\gamma(\tilde{h}_1+\kappa)(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})} \tag{4.10}$$

a_0 は $a_{11}, a_{12}, a_{22} \approx 0$ と上式を (4.7) 式に代入して得られる。以上より、近似最適投資比率密度は次の二つの条件式を満たす。

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \tilde{\varphi}_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau + (1-\tilde{\Phi}_t)v_1 \approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_1 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{(h_1+\kappa)\sigma+\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{(\tilde{h}_1+\kappa)(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})} \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \tilde{\varphi}_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau + (1-\tilde{\Phi}_t)v_2 \approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_2 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\kappa\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{(\tilde{h}_1+\kappa)(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})} \tag{4.12}$$

(4.11)(4.12) 式は、最適債券投資比率が短期金利にも平均短期金利にも依存しない一定値となることが示されている。

4.2.2 高次の近似解

高次の近似解については、次の命題を得る。

命題 3. 仮定 *1-4* の下、本問題 *(2.16)* の高次の解として次の *1*・*2* が成り立つ。

1. 近似値関数と近似最適消費はそれぞれ *(4.13)* 式と *(4.14)* 式で近似される。

$$\tilde{V}(W_t, r_t, \bar{r}_t) \approx \exp\left[\gamma\left\{a_0 + a_1 r_t + a_2\bar{r}_t + \frac{1}{2}a_{11}r_t^2 + a_{12}r_t\bar{r}_t + \frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{4.13}$$

$$\tilde{c}_t^* \;\approx\; \exp\left[-a_0 - a_1 r_t - a_2 \bar{r}_t - \frac{1}{2}a_{11} r_t^2 - a_{12} r_t \bar{r}_t - \frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right] W_t \quad (4.14)$$

ここで、a_{22} は近似式 *(4.8)* を満たしており、

$$a_{12} \;\approx\; -\left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right) a_{11} \quad (4.15)$$

$$a_{22} \;\approx\; -\left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right) a_{12} \approx \left(1 + \frac{2\bar{\kappa}}{\kappa}\right) a_{11} \quad (4.16)$$

$$a_1 \;\approx\; -\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\left(\frac{(\tilde{h}_1 + 2\kappa)(\sigma\lambda_1 - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2) - \sigma^2}{\kappa\sigma^2}\right) - \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\bar{r}\, a_{12} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} a_2 \approx \Bigg\{ & \frac{1}{\tilde{h}_1 + \bar{\kappa}}\left(-\left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)(\tilde{h}_1 + 2\kappa) + \kappa\right) a_1 \\ & + \left(\frac{\gamma + \delta - 1}{\gamma + \delta}\Big(\sigma\lambda_1 - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2\Big) a_{12} + \bar{\kappa}\bar{r}\, a_{22}\right)\Bigg\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} a_1 \approx \frac{1}{\tilde{h}_1}\Bigg(& \frac{\sigma^2}{2}a_{11} + \frac{\gamma(\gamma + \delta - 1)}{2(\gamma - 1)(\gamma + \delta)}\sigma^2 a_1^2 + \frac{\gamma + \delta - 1}{\gamma + \delta}\lambda_1 a_1 \\ & + \frac{1 - \gamma}{2\gamma(\gamma + \delta)}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2 - \beta\tilde{h}_1(1 - \log\tilde{h}_1)\Bigg) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$\tilde{h}_1$ は、*(3.22)* 式の $(a_0, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22})$ に *(4.8)* 式、*(4.15)-(4.19)* 式を代入して得られる方程式の数値解法により得られる解である。

2. 近似最適投資比率密度は近似式 *(4.20)(4.21)* を満たしている。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \tilde{\varphi}_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau + (1 - \tilde{\Phi}_t)v_1 \approx & \frac{1}{\gamma + \delta}\lambda_1 \\ & + \left(1 - \frac{1}{\gamma + \delta}\right)\frac{(\tilde{h}_1 + 2\kappa)(\sigma\lambda_1 - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2) - \sigma^2}{\kappa\sigma} \\ & + \frac{\tilde{h}_1 + 2\kappa}{\sigma}\left\{\Big(\bar{r}_t - r_t\Big) + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\Big(\bar{r}_t - \bar{r}\Big)\right\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \tilde{\varphi}_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau + (1 - \tilde{\Phi}_t)v_2 \approx & \frac{1}{\gamma + \delta}\lambda_2 \\ & + \left(1 - \frac{1}{\gamma + \delta}\right)\frac{\Big(-\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 + 2\kappa)\lambda_1 + (\tilde{h}_1 + \kappa)\sigma\Big)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{\kappa(\tilde{h}_1 + \bar{\kappa})\sigma} \\ & - \frac{(\tilde{h}_1 + 2\kappa)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{\sigma^2}\Big(\bar{r}_t - r_t\Big) \end{aligned} \quad (4.21)$$

ここで、

$$\sigma_1(\tau) = \frac{1}{\kappa}\Big(1 - e^{-\kappa\tau}\Big)\sigma + \left\{\frac{1}{\bar{\kappa}}\Big(1 - e^{-\bar{\kappa}\tau}\Big) + \frac{1}{\kappa - \bar{\kappa}}\Big(e^{-\kappa\tau} - e^{-\bar{\kappa}\tau}\Big)\right\}\bar{\rho}_1\bar{\sigma} \quad (4.22)$$

$$\sigma_2(\tau) = \left\{\frac{1}{\bar{\kappa}}\Big(1 - e^{-\bar{\kappa}\tau}\Big) + \frac{1}{\kappa - \bar{\kappa}}\Big(e^{-\kappa\tau} - e^{-\bar{\kappa}\tau}\Big)\right\}\bar{\rho}_2\bar{\sigma} \quad (4.23)$$

証明. 補論 A.4 参照。 □

留意点 4. 命題 *3* を命題 *2* と比較すると、数値解法負担は *1* 変数方程式の数値解導出にまで軽減している。また、近似最適投資比率密度が満たす条件式 *(4.20)(4.21)* 式は、前章で導出された条件式 *(3.27)(3.28)* に比べ、モデルの諸係数と最適投資比率が関数関係で明示されており、実証分析を容易にしていることがみてとれる。

参考文献

[1] Anderson, E. W., L. P. Hansen, and T. J. Sargent (2003), "A Quartet of Semi-groups for Model Specification, Robustness, Prices of Risk, and Model Detection," *Journal of the European Economic Association*, 1, 68-123.

[2] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2001), Appendix to *Strategic Asset Allocation*, on http://kuznets.fas.harvard.edu/ campbell/papers.html.

[3] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2002), *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, NY.

[4] Cheng, L. P. and L. G. Epstein (2002), "Ambiguity, Risk, and Asset Returns in Continuous Time," *Econometrica*, 70.

[5] Duffee, G. R. (2002), "Term Premia and Interest Forecast in Affine Models," *Journal of Finance*, 57, 405-43

[6] Duffie, D. and R. Kan (2002), "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, 6, 379-406.

[7] Epstein, L. G. and T. Wang (2001), "Subjective Probabilities on Subjectively Umbiguous Events," *Econometrica*, 69, 265-306.

[8] Hull, J. C. and A. White (1994), "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two Factor Models," *Journal of Derivatives*, 2, 37-48.

[9] Knight, F. H. (1921), *Risk, Uncertainty, and Profit*, Boston: Houghton Mifflin.

[10] Kusuda, K. (2006), "A Robust Recursive Utility under Jump-Diffusion Information," Working Paper B-9, Center for Risk Research, Faculty of Economics, Shiga University.

[11] Maenhout, P. J. (2004), “Robust Portfolio Rules and Asset Pricing,” *The Review of Financial Studies* 17, 4, 951-84.

[12] Vasicek, O. (1977), “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics* 5, 177-88.

[13] 楠田浩二 (2013a)「消費と債券投資の多期間最適化問題における高次の近似解析解」Discussion Paper J-35、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

[14] 楠田浩二 (2013b)「頑健効用に基づく消費と債券投資の多期間最適化」Discussion Paper J-38、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

[15] 楠田浩二 (2013c)「相似拡大的頑健効用と 2 ファクター金利モデルに基づく消費と債券ポートフォリオの多期間最適化問題の近似解析解」Discussion Paper J-39、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

A 証明

A.1 補題 1 の証明

標準ブラウン運動 (z_1, z_2) とリスクの市場価格 (λ_1, λ_2) により

$$z_{it}^* = z_{it} - \int_0^t \lambda_{is}\, ds \qquad i = 1, 2 \tag{A.1}$$

で定義される確率過程 (z_1^*, z_2^*) は、ギルサノフの定理より、リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である。よって、本稿の 2 ファクター金利モデルは、(z_1^*, z_2^*) を用いて

$$\begin{aligned}
dr_t &= \Big(\kappa\big(\bar{r}_t - r_t\big) - \sigma\big(\lambda_1 + \lambda_{11} r_t + \lambda_{12}\bar{r}_t\big)\Big)\, dt - \sigma\, dz_{1t}^* \\
d\bar{r}_t &= \Big(\bar{\kappa}\big(\bar{r} - \bar{r}_t\big) - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i\bar{\sigma}\big(\lambda_i + \lambda_{i1} r_t + \lambda_{i2}\bar{r}_t\big)\Big)\, dt - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i\, \bar{\sigma}\, dz_{it}^*
\end{aligned}$$

と表現される。

今、割引債 B^T を状態変数 $(r, \bar{r}_t, t)$ の上に書かれた派生資産と看做すと、滑らかな関数 $f(r_t, \bar{r}_t, t)$ により、

$$B_t^T = f(r_t, \bar{r}_t, t) \tag{A.2}$$

と表記される。このとき、無裁定条件から、f は次の偏微分方程式の境界値問題の解となっていることが示される。

$$f_t + \mu_t f_r + \bar{\mu}_t f_{\bar{r}} + \frac{\sigma^2}{2} f_{rr} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} f_{\bar{r}\bar{r}} + \rho\sigma\bar{\sigma} f_{r\bar{r}} - rf = 0 \tag{A.3}$$

$$\text{境界条件：}\quad f(T)=1 \tag{A.4}$$

ここで、
$$\begin{aligned}\mu_t &= \kappa\big(\bar{r}_t-r_t\big)-\sigma\big(\lambda_1+\lambda_{11}r_t+\lambda_{12}\bar{r}_t\big)\\ \bar{\mu}_t &= \bar{\kappa}\big(\bar{r}-\bar{r}_t\big)-\sum_{i=1}^{2}\ \bar{\rho}_i\bar{\sigma}\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)\end{aligned}$$

一方、本 2 ファクター・モデルはアフィン・モデルなので、上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 b_0, b_1, b_2 によって

$$f(r_t,\bar{r}_t,t)=e^{-b_0(t)-b_1(t)r_t-b_2(t)\bar{r}_t} \tag{A.5}$$

$$\text{境界条件：}\quad b_0(T)=b_1(T)=b_2(T)=0 \tag{A.6}$$

と書けることが示される。(A.5) 式に偏微分を施し、(A.3) 式に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}&-b_0'-b_1'r_t-b_2'\bar{r}_t-\Big(\kappa\big(\bar{r}_t-r_t\big)-\sigma\big(\lambda_1+\lambda_{11}r_t+\lambda_{12}\bar{r}_t\big)\Big)b_1\\ &-\Big(\bar{\kappa}\big(\bar{r}-\bar{r}_t\big)-\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)\Big)b_2+\frac{\sigma^2}{2}b_1^2+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}b_2^2+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}b_2b_3-r_t=0\end{aligned} \tag{A.7}$$

(A.7) 式は $(r_t,\bar{r}_t)$ の恒等式であるから、$(r_t,\bar{r}_t)$ の係数を整理すると、(2.7) 式を得る。最後に、(A.5) 式を対数微分して B_t^T の確率微分方程式を導出すると、(2.6) 式を得る。

A.2　補題 2 の証明

満期までの期間が τ の債券価格を $B_t(\tau)$ と表記する。所与の c の下、株式・全債券の自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta,\vartheta(\tau))$ を考える。先ず、次式が成り立っている。

$$W_t=\vartheta_tS_t+\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)B_t(\tau)d\tau \tag{A.8}$$

また、当該ポートフォリオは自己資金充足的であるから次式が成り立っている。

$$dW_t=\vartheta_tdS_t+\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)dB_t(\tau)d\tau-c_tdt \tag{A.9}$$

上式の dS_t と $dB_t(\tau)$ にそれぞれ (2.4) 式と (2.5) 式を代入し、そこで現れる ϑ_tS_t に (A.8) 式を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned}dW_t=&\left(W_t-\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)B_t(\tau)d\tau\right)\left\{\left(r_t+\sum_{i=1}^{2}v_i\lambda_{it}\right)dt+\sum_{i=1}^{2}v_i\,dz_{it}\right\}\\ &+\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)B_t(\tau)\left\{\left(r_t+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\sigma_i(\tau)\right)dt+\sum_{i=1}^{2}\sigma_i(\tau)\,dz_{it}\right\}d\tau-c_tdt\end{aligned} \tag{A.10}$$

上式に $\vartheta_t(\tau)B_t(\tau) = \varphi_t(\tau)W_t$ を代入し、整理すると、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
dW_t = W_t \Biggl\{ & \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} v_i \lambda_{it} \right) dt + \sum_{i=1}^{2} v_i \, dz_{it} \\
& + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \Bigl(\sigma_i(\tau) - v_i \Bigr) d\tau \lambda_{it} \right) dt \\
& + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \Bigl(\sigma_i(\tau) - v_i \Bigr) d\tau dz_{it} \right) \Biggr\} - c_t dt \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

さらに、上式を整理すると、(2.9) 式が得られる。

A.3 命題 1 の証明

先ず、値関数 (3.10) 式に偏微分を施すと、次の式群を得る。

$$
\begin{aligned}
& W_t V_W = (1-\gamma)V, \quad W_t^2 V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V, \quad V_r = \gamma \frac{H_r}{H} V, \quad V_{\bar{r}} = \gamma \frac{H_{\bar{r}}}{H} V, \\
& W_t V_{Wr} = \gamma(1-\gamma)\frac{H_r}{H} V, \quad W_t V_{W_t \bar{r}} = \gamma(1-\gamma)\frac{H_{\bar{r}}}{H} V, \\
& V_{rr} = \gamma \left\{ \frac{H_{rr}}{H} + (\gamma - 1) \left(\frac{H_r}{H} \right)^2 \right\} V, \quad V_{\bar{r}\bar{r}} = \gamma \left\{ \frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H} + (\gamma - 1) \left(\frac{H_{\bar{r}}}{H} \right)^2 \right\} V, \\
& V_{r\bar{r}} = \gamma \left\{ \frac{H_{r\bar{r}}}{H} + (\gamma - 1) \left(\frac{H_r}{H} \right) \left(\frac{H_{\bar{r}}}{H} \right) \right\} V \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

最適投資比率密度 $\varPhi_t^*$ は次式を満たしていることに留意しておく。

$$
\varPhi_{it}^* = -\frac{q_i(Y_t)}{p(Y_t)} \qquad i = 1, 2 \qquad \text{(A.13)}
$$

値関数の偏微分結果 (A.12) を (3.7)-(3.9) 式に代入すると、(A.14)-(A.16) 式を得る。

$$
p(Y_t) = (\gamma - 1)(\gamma + \delta)V \qquad \text{(A.14)}
$$

$$
q_1(Y_t) = \left\{ (1-\gamma)\lambda_{1t} + \gamma(1-\gamma-\delta) \left(-\sigma \frac{H_r}{H} - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} \frac{H_{\bar{r}}}{H} \right) \right\} V \qquad \text{(A.15)}
$$

$$
q_2(Y_t) = \left\{ (1-\gamma)\lambda_{2t} + \gamma(1-\gamma-\delta) \left(-\bar{\rho}_1 \bar{\sigma} \frac{H_{\bar{r}}}{H} \right) \right\} V \qquad \text{(A.16)}
$$

(A.13) 式に (A.14)-(A.16) 式を代入すると、(3.11)(3.12) 式を得る。

値関数 V の偏微分方程式 (3.6) における投資比率密度 φ 関連項は $\varPhi_1$ 関連項と $\varPhi_2$ 関連項は最適投資比率密度条件 (3.11)(3.12) 式と (A.12) 式を用いる

と、次のように整理される。

$$-\frac{1}{2}\frac{q_1^2(Y_t)}{p(Y_t)} = -\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left((1-\gamma)\lambda_{1t} + \gamma(\gamma+\delta-1)\sigma\frac{H_r}{H} + \gamma(\gamma+\delta-1)\bar{\rho}_1\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2 V$$

$$= -\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{(\gamma-1)^2\lambda_{1t}^2+\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2\left(\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2\right)\right.$$

$$\left.-2\gamma(\gamma-1)(\gamma+\delta-1)\lambda_{1t}\left(\sigma\left(\frac{H_r}{H}\right)+\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}^2\lambda_{1t}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right)+2\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}$$

$$= -\frac{\gamma-1}{2(\gamma+\delta)}\lambda_{1t}^2-\frac{\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2-\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right)$$

$$\left.+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\lambda_{1t}\left(\sigma\left(\frac{H_r}{H}\right)+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right)\right\} \quad \text{(A.17)}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{q_1^2(Y_t)}{p(Y_t)} = -\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left((1-\gamma)\lambda_{2t} + \gamma(\gamma+\delta-1)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2 V$$

$$= -\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{(\gamma-1)^2\lambda_{2t}^2+\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2\bar{\rho}_2^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2\right.$$

$$\left.-2\gamma(\gamma-1)(\gamma+\delta-1)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_{2t}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}$$

$$= -\frac{(\gamma-1)}{2(\gamma+\delta)}\lambda_{2t}^2-\frac{\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\bar{\rho}_2^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_{2t}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \quad \text{(A.18)}$$

このとき、(A.12)(A.17)(A.18) 式を用いると、V の偏微分方程式 (3.6) における

$$\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2, \bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2, \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \quad \text{(A.19)}$$

の係数は共通で次のように計算される。

$$\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}-\frac{\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}+\frac{\gamma\delta}{2(\gamma-1)}$$

$$= \frac{\gamma\left\{(\gamma-1)^2(\gamma+\delta)-\gamma(\gamma+\delta-1)^2+\gamma\delta(\gamma+\delta)\right\}}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}$$

$$= \frac{\gamma\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \quad \text{(A.20)}$$

値関数 V の偏微分方程式 (3.6) における消費過程 c 関連項は、最適消費 (3.3) 式を代入し、(A.12) 式を用いると、

$$-c^* + \frac{c^{*1-\gamma}}{1-\gamma} = \gamma\frac{V}{H} \quad \text{(A.21)}$$

を得る。

(A.12) 式、(A.17)(A.18) 式、(A.20)(A.21) 式を V の偏微分方程式 (3.6) に代入し整理すると、(3.13) 式が得られる。

A.4　命題 3 の証明

先ず、(4.15)-(4.18) 式を示す。a_{12} については、(4.4) 式を σ^2 で除し、近似式 (4.1) を用いて整理すると、次式を得る。

$$\left(\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}a_{11}-\frac{\tilde{h}_1+\kappa+\bar{\kappa}}{\sigma^2}\right)a_{12}\approx-\frac{\kappa}{\sigma^2}a_{11} \tag{A.22}$$

上式左辺の a_{11} に (4.8) 式を代入し整理すると、次式を得る。

$$a_{12}\approx-\frac{\kappa}{\kappa-\bar{\kappa}}a_{11} \tag{A.23}$$

上式に近似式 (4.1) を適用すると、(4.15) 式が得られる。

a_{22} については、(4.3) 式を σ^2 で除し、近似式 (4.1) を用いると、次式を得る。

$$\frac{\tilde{h}_1+2\bar{\kappa}}{\sigma^2}a_{22}\approx\left(\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}a_{12}+\frac{2\kappa}{\sigma^2}\right)a_{12} \tag{A.24}$$

上式右辺括弧内の a_{12} に (4.15) 式を代入し、(4.8) 式と近似式 (4.1) を用いると、次のように計算される。

$$\begin{aligned}a_{22}&\approx\frac{1}{\tilde{h}_1+2\bar{\kappa}}\left\{-(\tilde{h}_1+2\kappa)\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)+2\kappa\right\}a_{12}\\&=\frac{1}{\tilde{h}_1+2\bar{\kappa}}\left\{-\tilde{h}_1\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)-2\bar{\kappa}\right\}a_{12}\\&\approx-\frac{1}{\tilde{h}_1+2\bar{\kappa}}\left\{\tilde{h}_1\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)+2\bar{\kappa}\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)\right\}a_{12}\end{aligned}$$

上式と (4.15) 式から (4.16) 式が得られる。

a_1 については、(4.5) 式を σ^2 で除し、近似式 (4.1) を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}a_{11}-\frac{\tilde{h}_1+\kappa}{\sigma^2}\right)a_1\\&\qquad\approx-\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\left(\sigma\lambda_1a_{11}+\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2a_{12}\right)+\bar{\kappa}\bar{r}\,a_{12}-\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\end{aligned} \tag{A.25}$$

上式に (4.4) 式と (4.2) 式を適宜代入し、近似式 (4.1) を用いて整理すると、(4.17) 式が得られる。

a_2 については、(4.6) 式を σ^2 で除し、(4.8)(4.15) 式と近似式 (4.1) を用い

ると、次式を得る。

$$\frac{\tilde{h}_1+\bar{\kappa}}{\sigma^2}a_2 \approx \frac{1}{\sigma^2}\left\{-\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)(\tilde{h}_1+2\kappa)+\kappa)\right\}a_1 + \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Big(\sigma\lambda_1-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2\Big)a_{12}+\bar{\kappa}\bar{r}\,a_{22}\right) \tag{A.26}$$

上式から (4.18) 式を得る。

次に、(4.20)(4.21) 式を示す。(3.27) 式右辺第 2 項の

$$k_1(r_t,\bar{r}_t) := -\Big(\sigma a_1+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_2\Big)-\Big(\sigma a_{11}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{12}\Big)r_t-\Big(\sigma a_{12}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{22}\Big)\bar{r}_t \tag{A.27}$$

を計算する。上式の (a_1, a_{11}, a_{12}) に (4.17)(4.8)(4.15) 式を代入し、近似式 (4.1) を用いると、次式を得る。

$$k_1(r_t,\bar{r}_t) \approx \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)(\sigma\lambda_1-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2)-\sigma^2}{\kappa\sigma}\right)-\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\sigma a_{11}\bar{r} - \frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{\tilde{h}_1+2\kappa}{\sigma}r_t+\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)\frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{\tilde{h}_1+2\kappa}{\sigma}\bar{r}_t \tag{A.28}$$

上式に (4.8) 式を代入すると、(4.20) 式が得られる。

(3.28) 式右辺第 2 項の

$$k_2(r_t,\bar{r}_t) := -\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\Big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\Big) \tag{A.29}$$

を計算する。上式の (a_2, a_{12}, a_{22}) に (4.18)(4.15)(4.16) 式を代入し、(4.17) 式と近似式 (4.1) を用いると、次式のように展開出来る。

$$\begin{aligned}
k_2(r_t,\bar{r}_t) &\approx -\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\tilde{h}_1+\bar{\kappa}}\left\{\Big(-(\tilde{h}_1+\kappa)\Big)\left\{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\sigma\lambda_1-\sigma^2}{\kappa\sigma^2}\right)\right\} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\sigma\lambda_1}{\sigma^2}\right\}-a_{11}r_t+a_{11}\bar{r}_t\right] \\
&= \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\tilde{h}_1+\bar{\kappa}}\right)\left\{-(\tilde{h}_1+\kappa)\left(\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\sigma\lambda_1-\sigma^2}{\kappa\sigma^2}\right)+\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\sigma\lambda_1}{\sigma^2}\right\}+\bar{\rho}_2\bar{\sigma}a_{11}(r_t-\bar{r}_t) \\
&= \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{\Big(-\tilde{h}_1(\tilde{h}_1+2\kappa)\lambda_1+(\tilde{h}_1+\kappa)\sigma\Big)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{\kappa(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})\sigma}+\frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{\sigma^2}(r_t-\bar{r}_t)
\end{aligned} \tag{A.30}$$

上式から、(4.21) 式が得られる。

最後に、(4.22)(4.23) 式を示す。補題 1 における (b_1, b_2) の常微分方程式 (2.7) に $\lambda_{i1}=\lambda_{i2}=0$ $(i=1,2)$ を代入すると、(b_1, b_2) は次の連立常微分方程式の解である。

$$\frac{d}{dt}b_1(t) = \kappa b_1(t)-1 \tag{A.31}$$

$$\frac{d}{dt}b_2(t) = -\kappa b_1(t) + \bar{\kappa} b_2(t) \tag{A.32}$$

(A.31) 式は線形微分方程式であるから、定数変化法を用いると、境界条件から、

$$b_1(t) = \frac{1}{\kappa}\Big(1 - e^{-\kappa(T-t)}\Big) \tag{A.33}$$

と解ける。上式を (A.32) 式に代入すると、これも線形微分方程式であるから、定数変化法と境界条件を用いて、次のように解ける。

$$b_2(t) = \frac{1}{\bar{\kappa}}\Big(1 - e^{-\bar{\kappa}(T-t)}\Big) + \frac{1}{\kappa - \bar{\kappa}}\Big(e^{-\kappa(T-t)} - e^{-\bar{\kappa}(T-t)}\Big) \tag{A.34}$$

(A.33)(A.34) 式を補題 1 の (2.6) 式に代入すると、(4.22)(4.23) 式が得られる。