CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-39

相似拡大的頑健効用と 2 ファクター金利モデルに基づく消費と債券ポートフォリオの多期間最適化問題の近似解析解

楠田 浩二

2013 年 5 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-39

相似拡大的頑健効用と 2 ファクター金利モデルに基づく消費と債券ポートフォリオの多期間最適化問題の近似解析解

楠田　浩二[1]

2013 年 5 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY
1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒 522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

キーワード: 確率制御、近似解析解、金利リスク、債券投資、相似拡大的頑健効用、2 ファクター・モデル、ナイトの不確実性、ポートフォリオ最適化

JEL 分類番号: C62、D14、G11

概 要

ナイトの不確実性下における消費と債券投資（1 債券）の多期間最適化問題において、楠田 (2013b) は「相似拡大的頑健効用」（Maenhout (2004)）と金利の 1 ファクター・バシチェック・モデルを仮定し近似解析解を導出している。本稿では、投資対象を全満期の債券に、バシチェック・モデルを 2 ファクター・ハル・ホワイト・モデルにそれぞれ拡張した上で相似拡大的頑健効用下の最適ポートフォリオの近似解析解を導出する。近似最適投資比率は、この種の複雑なポートフォリオ最適化問題の近似解析解の多くが数値解法による陰伏的表現でしか与えられていないのに対し、状態変数である短期金利と平均短期金利の明示的関数として示される。

[1] 本稿は滋賀大学経済学部附属リスク研究センター東アジア保険プロジェクトにおける中国東北財経大学金融学院との共同研究の成果の一部である。尚、本研究の過程では、リスク研究センター長・久保英也教授に有益な御指摘と愛情溢れる御鞭撻を賜った。ここに特筆して厚く感謝申し上げる。

1 序論

安全性を重視する個人投資家向けの投資信託や長期債務を有する外資系生保等の機関投資家は債券中心の運用を行っている場合が少なくないことを考慮すると、消費と債券ポートフォリオの最適化問題の考察は経済学的意義がある。Campbell and Viceira (2002) は、安全証券と満期までの期間が一定の長期債を投資対象とする消費と投資の多期間最適化問題を相対的危険回避度一定の期待効用関数と金利のバシチェック・モデルを仮定して確率制御の手法で解いている。その結果、最適ポートフォリオの導出は金利の未知関数に関する非斉次の常微分方程式の求解問題に帰着されている。彼等は同常微分方程式における消費過程に起因する非斉次項を対数線形近似し、近似解析解を与えている。その結果、債券の最適投資比率は、近視眼的需要項と金利変動に保険を掛けるための保険需要項に分解されるほか、相対的危険許容度によって重み付けられた両項の加重平均となることが示されている。しかし、債券の最適投資比率は金利に依存していないため、低金利局面では短期債（安全証券）から長期債へ、高金利局面では長期債から短期債へ移行する現実の投資行動を説明出来ていない。

楠田 (2013a) は当該問題において Campbell and Viceira (2002) よりも高次の近似解析解を導いている。その結果、高次の解における債券投資比率は保険需要項が金利に独立な項と金利に依存する項に分解され、金利依存項は債券投資比率が低金利局面では上昇し高金利局面では低下することを示しており、現実に観察される投資行動を説明している。

また、楠田 (2013b) は同問題にナイトの不確実性（Knight (1921)）を導入し、Anderson, Hansen, and Sargent (2003) 等の提唱する「頑健効用 (robust utility)」の短所を克服する効用として Maenhout (2004) が提案している「相似拡大的頑健効用 (homothetic robust utility)」を仮定し、同最適化問題の低次と高次の解析解を与えている。その結果、相似拡大的頑健効用下の高次の解における債券投資比率もナイトの不確実性が存在しない場合と関数形は一致するが、加重平均の重みである相対的危険許容度の項が相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和の逆数に取って代わることが示されている。[1]

上記 3 論文では、1 ファクター金利モデルで、債券投資の対象が 1 債券のみと仮定されている。しかし、1 ファクター・モデルでは、満期の異なる債券の収益率が完全相関する。現実には満期の異なる債券は完全相関しないことから、投資家は同相関を利用して複数の債券から成る効率的な債券ポートフォリオの組成を企図している。本稿では、短期金利の変動をモデル化した

[1]危険と曖昧性を総称して「不確実性」と呼ぶのであれば、相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和を「相対的不確実性回避度」、その逆数を「相対的不確実性許容度」と呼ぶのは自然であろう。かかる概念を用いれば、債券投資比率における加重平均の重みは、ナイトの不確実性が存在しない場合の相対的許容度から相似拡大的頑健効用下の「相対的不確実性許容度」へ置き換わることが示された、と表現出来る。そして、同結果は、ナイトの不確実性への考慮が目先（近視眼的需要）よりも将来（保険需要）を重視させている、と自然に解釈される。

バシチェック・モデルに平均短期金利の変動を付加した 2 ファクター・ハル・ホワイト・モデルと全満期の債券を対象としたポートフォリオを仮定し、消費と債券ポートフォリオの最適化問題における近似解析解の導出を試みる。

主要な結果を楠田 (2013b) と比較すると、以下の通りである。先ず、予想通り、最適投資比率の満たす条件が 1 ファクター・モデルにおける 1 式から 2 式に増えるほか、保険需要項がについては 1 ファクター・モデルにおける短期金利変動保険需要項に短期平均金利変動保険需要項が付加される。また、1 ファクター・モデルで値関数を構成している短期金利の関数と同関数の 2 階の非斉次の常微分方程式が 2 ファクター・モデルでは短期金利と同平均金利の 2 変数関数と同関数の 2 階の非斉次の偏微分方程式に取って代わる。非斉次項の近似は Campbell and Viceira (2002) の対数線形近似法が本問題にも有効であることが示されるものの、この種の複雑なポートフォリオ最適化問題で示されている多くの結果と同様に、当該近似偏微分方程式は数値解法に依拠しなければ解けないため、短期金利と平均金利が最適投資比率に与える影響を明示出来ておらず、実証分析を困難にしている。そこで、平均短期金利が短期金利に比べ平均回帰速度と分散が有意に小さいことと両金利の相関が相当程度低いことを仮定し、近似解析解を導出する。導出された最適投資比率は、保険需要項が短期金利と短期平均金利の両者に依存することを明示的に示しており、実証分析を容易にしている。

本稿の次章以降の構成は次の通りである。2 章では、3 章以降の準備として、ナイトの不確実性が存在しない場合を対象に 2 ファクター金利モデルに基づく消費と債券ポートフォリオの最適化問題の確率制御による解法を示す。3 章では、相似拡大的頑健効用（Maenhout (2004)）を仮定して消費と債券投資の最適化問題の最適条件から値関数を構成する金利・平均金利の 2 変数関数の偏微分方程式を導出する。4 章では、偏微分方程式の近似解析解を Campbell and Viceira (2002) と楠田 (2013a) の手法に沿って導出する。5 章では、付加的な仮定を置き、関数関係が明確で実証分析の容易な近似解析解を導出する。

2　2 ファクター金利モデルに基づく消費と債券ポートフォリオの最適化

本章では、ナイトの不確実性下で頑健効用と 2 ファクター金利モデルに基づく消費と債券ポートフォリオの最適化問題を解く準備段階として、ナイトの不確実性が存在しない場合を対象に 2 ファクター金利モデルに基づく消費と債券ポートフォリオの最適化問題の確率制御による解法を示す。

2.1 環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。投資家の共通主観確率と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデル化されている。ここで、$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{T}}$ は標準ブラウン運動 z によって生成される自然なフィルターである。P の下での期待作用素を E と表記する。

一種類の消費財、安全証券、割引債が任意の時点で市場で取引されている。割引債は任意の時点で発行され、発行時点の満期までの期間は τ とする。安全証券の価格を B、満期 T の割引債の価格を B^T と表記する。消費財空間は、消費率過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty \quad a.s.$ を満たす非負値適合的過程の空間とする。

金利の変動過程については、安全証券と 1 種類の長期債のポートフォリオ問題を考察している Campbell and Viceira (2002) や楠田 (2013a) では、瞬間的スポット・レートを対象に金利の平均回帰傾向を織り込んだ 1 ファクター・モデルであるバシチェック・モデル (Vasiceck (1997)) を仮定している。しかし、1 ファクター・モデルでは、満期の異なる債券の収益率は完全相関するため、本稿のような全満期の債券のポートフォリオ問題の考察には適していない。そもそも、金利のイールド・カーブの変動については、主成分分析から、長短金利の平行移動 (parallel shift)、捩れ (twist)、歪み (curvature) の 3 成分で 99%以上が説明できるとされている。特に、平行移動成分が 80〜90%、これに捩れ成分を加えると、90〜95%の説明力を持つとされている。そこで、バシチェック・モデルにおいて定数と仮定されている平均金利の変動を織り込んで満期の異なる債券間の相関の表現を企図した「2 ファクター・ハル・ホワイト・モデル」(Hull and White (1994)) を仮定する。

仮定 1. 瞬間的スポット・レート r は次の過程に従う。

$$dr_t = \kappa_r(\bar{r}_t - r_t)\,dt + \sigma\,dz_{1t} \tag{2.1}$$

$$d\bar{r}_t = \kappa(\bar{r} - \bar{r}_t)\,dt + \rho\,\bar{\sigma}\,dz_{1t} + \sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}\,dz_{2t} \tag{2.2}$$

ここで、κ は瞬間的スポット・レートの平均金利過程 br_t への回帰速度、σ は拡散係数、$\bar{\kappa}$ は平均金利過程の平均金利 $\bar{r}$ への回帰速度、$\bar{\sigma}$ は拡散係数をそれぞれ表す正の定数である。また、ρ は dr_t と $d\bar{r}_t$ の相関を表す定数である。

以下では、平均金利過程を br_t を「平均金利」、平均金利 $\bar{r}$ を「長期平均金利」と呼ぶ。

上記モデルは、状態変数 $(r_t, \bar{r}_t)$ のアフィン・モデル（Duffie and Kan (1996)）に包含される。リスクの市場価格については、定数と仮定されたモデルは「完備アフィン・モデル（completely affine models)」、状態変数のアフィン関数と仮定されたモデルは「本質的アフィン・モデル（essentially affine models)」とそれぞれ呼ばれている（Duffie (2004)）。本稿では、近似解析解導出が主目的であるため、「完備アフィン・モデル」を仮定する。

仮定 2. リスクの市場価格 λ は一定で、次式を満たしている。

$$\lambda_{it} = \lambda_i \qquad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

ここで、λ_i は定数である。

補題 1. 仮定 *1*・*2* の下、満期 T の割引債の無裁定価格 B^T は次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dB_t^T}{B_t^T} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \sigma_i(\tau) \right) dt - \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau)\, dz_{it} \tag{2.4}$$

ここで、$\tau = T - t$、

$$\sigma_1(\tau) = \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa\tau}\right)\sigma + \left\{ \frac{1}{\bar{\kappa}}\left(1 - e^{-\bar{\kappa}\tau}\right) + \frac{1}{\kappa - \bar{\kappa}}\left(e^{-\kappa\tau} - e^{-\bar{\kappa}\tau}\right) \right\}\rho\bar{\sigma} \tag{2.5}$$

$$\sigma_2(\tau) = \left\{ \frac{1}{\bar{\kappa}}\left(1 - e^{-\bar{\kappa}\tau}\right) + \frac{1}{\kappa - \bar{\kappa}}\left(e^{-\kappa\tau} - e^{-\bar{\kappa}\tau}\right) \right\}\sqrt{1 - \rho^2}\,\bar{\sigma} \tag{2.6}$$

証明. 補論 A.1 参照。 □

本章では、投資家の効用汎関数は相対的危険回避度一定の期待効用汎関数（CRRA 効用）と仮定する。

仮定 3. 投資家の効用汎関数は次式で表される *CRRA* 効用である。

$$u(c) = E\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \right] \qquad \text{if } \gamma \neq 1$$

$$= E\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \log\, c_t\, dt \right] \qquad \text{if } \gamma = 1$$

ここで、β は割引率、γ は相対的危険回避度をそれぞれ表す正の定数である。

2.2 確率制御による解法

投資家は初期時点の金利 r_0 と平均金利 $\bar{r}_0$ を所与として与えられた富 W_0 を安全証券と任意の満期の債券に投資することによって効用関数を最大化する問題を解く。通常は富に対する証券の投資比率を最適化するが、本稿では、任意の満期の債券を投資対象としているため富に対する債券投資比率密度を最適化する。初期状態を $y = (W_0, r_0, \bar{r}_0)$、富に対する債券投資比率密度の過程を φ と表記する。所与の消費率過程 c 及び投資比率密度過程 φ の下、富過

程 W は次の予算制約式を満たす。

$$dW_t = \left\{\left(r_t + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau\, \lambda_i\right)\right) W_t - c_t\right\} dt$$
$$- \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau\, W_t\, dz_{it}\right) \quad (2.7)$$

予算制約式 (2.7) を満たす消費財・投資比率過程 (c,φ) を初期状態 y に対する許容的制御と呼び、許容的制御の集合を $\mathcal{C}(y)$ と表記する。このとき、最適投資問題は次式で定義される値関数 $V(y)$ の解析解を求める問題となる。

$$V(y) = \sup_{(c,\varphi)\in\mathcal{C}(y)} u(c) \quad (2.8)$$

本問題 (2.8) は次の Hamilton-jacobi-Bellman 方程式（以下、「HJB 方程式」）を解く問題に帰着される。

$$\sup_{\varphi}\left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(W_t,r_t,\bar{r}_t) - \beta V(W_t,r_t,\bar{r}_t) - \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = 0 \quad (2.9)$$

s.t. 横断条件

$$\lim_{T\to\infty} E[\, e^{-\beta T}V(W_T,r_T)\,] = 0 \quad (2.10)$$

ここで、

$$\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(W_t,r_t,\bar{r}_t) = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau\, \lambda_i\right)\right) W_t V_W$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau\, \lambda_i\right)^2 W_t^2 V_{WW} - \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau\, \sigma\, W_t V_{Wr}$$
$$- \left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau\rho\sigma + \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}\right) W_t V_{W\bar{r}}$$
$$+ \kappa(\bar{r}_t - r_t)V_r + \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t)V_{\bar{r}} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}\bar{r}} + \rho\sigma\bar{\sigma}V_{r\bar{r}} \quad (2.11)$$

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から最適消費・投資比率密度 (c^*,φ^*) は次式を満たしている。

$$c^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (2.12)$$
$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(s)\sigma_1(s)ds = -\frac{V_W}{W_t V_{WW}}\lambda_1 + \frac{V_{Wr}}{W_t V_{WW}}\sigma + \frac{V_{W\bar{r}}}{W_t V_{WW}}\rho\bar{\sigma} \quad (2.13)$$
$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(s)\sigma_2(s)ds = -\frac{V_W}{W_t V_{WW}}\lambda_2 + \frac{V_{Wr}}{W_t V_{WW}}\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma} \quad (2.14)$$

留意点 1. 上記最適投資比率を、*1* ファクター・モデルにおける安全証券と *1* 債券を対象とした場合の最適投資比率（楠田 *(2013b)*）と比較すると、後者

における保険需要項が短期金利変動保険需要項のみであったのに対し、前者では、短期金利変動保険需要項と平均短期金利変動保険需要項に分解されている。また、最適投資比率の満たす条件式は後者の *1* 式から前者の *2* 式に増えている。但し、投資対象債券を全満期としたため、各債券の投資比率（密度）は不定となっている。

(2.12)-(2.14) 式を HJB 方程式に代入して得られる 2 階の偏微分方程式から値関数が次の関数形をとることが推測される。

$$V(W_t, r_t, \bar{r}_t) = \big(H(r_t, \bar{r}_t)\big)^\gamma \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{2.15}$$

このとき、次の命題を得る。

命題 1. 仮定 *1-3* の下、消費と債券ポートフォリオの最適化問題の値関数 *(2.15)* を構成する金利・短期平均金利の未知関数 H は次の *2* 階の偏微分方程式の解である。

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right) + \frac{\gamma\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right) + \gamma\rho\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right) \\
&\qquad + (\gamma\kappa(\bar{r}_t - r_t) - (1-\gamma)\lambda_1\sigma)\left(\frac{H_r}{H}\right) + \\
&\Big(\gamma\bar{\kappa}(\bar{r}_t - \bar{r}_t) - (1-\gamma)(\lambda_1\rho + \lambda_2\sqrt{1-\rho^2})\bar{\sigma} + \lambda_2\Big)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \\
&\qquad + \left((1-\gamma)r_t + \frac{(1-\gamma)\|\lambda\|^2}{2\gamma} - \beta\right) + \gamma\left(\frac{1}{H}\right) = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

証明. 補論 A.2 参照。 □

上記偏微分方程式は、次章の相似拡大的頑健効用に基づく消費と債券ポートフォリオの最適化問題に対して導出される偏微分方程式の特殊な場合（「曖昧性中立的」な場合）として包含されることが示され、そこで、上記偏微分方程式の近似解析解が明らかにされる。

3 相似拡大的頑健効用に基づく消費と債券ポートフォリオの最適化

本章では、Anderson, Hansen, and Sargent (2003) が提案する頑健効用を紹介した後、同効用と 2 ファクター金利モデルに基づく消費と投資の最適化問題に対する HJB 方程式を示す。そして、Maenhout (2004) が提案する相似拡大的頑健効用と同効用下における消費と投資の最適化問題に対する HJB 方程式と最適条件から値関数を構成する金利・平均金利の 2 変数関数の偏微分方程式を導出する。

3.1 ナイトの不確実性と頑健効用

$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P と等価な全ての確率測度の集合を $\mathbb{P}$ 表記する。このとき、任意の等価測度はギルサノフの定理により 2 乗可積分な適合的過程により表現されることが示される。すなわち、任意の等価測度 P^v は次式のラドン・ニコディム微分により定義される。

$$\frac{dP^v}{dP} = \Lambda^v = \exp\left(\int_0^\infty v_t dz_t - \frac{1}{2}\int_0^\infty v_t^2 dt\right) \tag{3.1}$$

ナイトの不確実性下、頑健効用を有する投資家は現実の確率測度として P を尤も有り得べき確率測度であると認識しているが、P と等価な他の確率測度である可能性を否定できない。そこで、彼は各消費計画に対し最悪の場合（確率測度）を想定して等価確率測度集合 $\mathbb{P}$ 上で期待効用関数を最小化する「最悪確率測度」を求める。この際、P を尤も有り得べき確率測度と認識している以上、P と大幅に乖離する最悪確率測度を想定することは杞憂であるから、P との乖離に損失を与える P に関する最悪確率測度の割引かれた相対エントロピーを期待効用に付加した関数を最小化対象とする。ここで、P に関する最悪確率測度の割引かれた相対エントロピーは次式で定義される。

$$\tilde{\mathcal{R}}^v = E^v\left[\beta\int_0^\infty e^{-\beta t}\log\Lambda_t^v\, dt\right] \tag{3.2}$$

以下では、P を「参考確率測度」と呼ぶ。

投資家の効用汎関数は次式で表される頑健効用汎関数であると仮定する。

$$\begin{aligned} u(c) &= \inf_{P^v\in\mathbb{P}} E^v\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\, dt\right] + \frac{1}{\theta}\tilde{\mathcal{R}}^v \qquad \text{if } \gamma \neq 1 \\ &= \inf_{P^v\in\mathbb{P}} E^v\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\log c_t\, dt\right] + \frac{1}{\theta}\tilde{\mathcal{R}}^v \qquad \text{if } \gamma = 1 \end{aligned}$$

ここで、β は割引率、γ は相対的危険回避度、θ は「曖昧性の回避度合」を表す正の定数である。

留意点 2. $\theta = 0_+$ のとき、最悪確率測度は参考確率測度 P となる。θ が増加するにつれて、参考確率測度 P に関する最悪確率測度の割り引かれた相対エントロピーは大きくなり、従って、最悪確率測度と基準確率測度の乖離は増大する、すなわち、θ が大きくなるにつれて、投資家がより曖昧性回避的となることがジャンプ拡散情報の下で示されている。[2]

3.2 一般化頑健効用と相似拡大的頑健効用下の確率制御

Anderson, Hansen, and Sargent (2003) は、頑健効用における最悪確率測度導出が、状態変数に下方圧力を加えるための項

$$g(W_t, r_t, \bar{r}_t) = (g_1(W_t, r_t, \bar{r}_t), g_2(W_t, r_t, \bar{r}_t))$$

[2] 例えば、Kusuda (2006) を参照せよ。

を次のように加えた後、

$$dW_t = \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau) d\tau\, \lambda_i \right) \right) W_t - c_t \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau) d\tau\, W_t g_i(W_t, r_t, \bar{r}_t) \right) \right\} dt$$
$$- \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_i(\tau) d\tau\, W_t\, dz_{it} \right) \quad (3.3)$$

$$dr_t = \kappa\Big(\bar{r}_t - r_t + \sigma g_1(W_t, r_t, \bar{r}_t)\Big)\, dt + \sigma\, dz_{1t} \quad (3.4)$$

$$d\bar{r}_t = \bar{\kappa}\Big(\bar{r} - \bar{r}_t + \rho\bar{\sigma} g_1(W_t, r_t, \bar{r}_t) + \sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma} g_2(W_t, r_t, \bar{r}_t)\Big)\, dt$$
$$+ \rho\bar{\sigma}\, dz_{1t} + \sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}\, dz_{2t} \quad (3.5)$$

次式で表される最小化を行うことと等価であることを示している。

$$\inf_g \left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)} V + \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_1(\tau) d\tau\, W_t V_W + \sigma V_r + \rho\bar{\sigma} V_{\bar{r}} \right) g_1(W_t, r_t, \bar{r}_t) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_2(\tau) d\tau\, W_t V_W + \sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma} V_{\bar{r}} \right) g_2(W_t, r_t, \bar{r}_t) + \frac{1}{2\theta} \| g(W_t, r_t, \bar{r}_t) \|^2 \right] \quad (3.6)$$

従って、頑健効用における HJB 方程式は次式のように表される。

$$\sup_{(c,\varphi)} \inf_g \left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)} V - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_1(\tau) d\tau\, W_t V_W + \sigma V_r + \rho\bar{\sigma} V_{\bar{r}} \right) g_1$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_2(\tau) d\tau\, W_t V_W + \sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma} V_{\bar{r}} \right) g_2 + \frac{1}{2\theta} \|g\|^2 \right] = 0 \quad (3.7)$$

s.t. (2.10)

先ず、最小化条件より、

$$g_1^* = -\theta \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_1(\tau) d\tau\, W_t V_W + \sigma V_r + \rho\bar{\sigma} V_{\bar{r}} \right) \quad (3.8)$$

$$g_2^* = -\theta \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\sigma_2(\tau) d\tau\, W_t V_W + \sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma} V_{\bar{r}} \right) \quad (3.9)$$

g^* を HJB 方程式に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}\sup_{(c,\varphi)}\Bigg[&\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V-\beta V+\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\\&-\frac{\theta}{2}\Bigg\{\left(\frac{1}{\bar\tau}\int_0^{\bar\tau}\varphi_t(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau\,W_tV_W+\sigma V_r+\rho\bar\sigma V_{\bar r}\right)^2\\&+\left(\frac{1}{\bar\tau}\int_0^{\bar\tau}\varphi_t(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau\,W_tV_W+\sqrt{1-\rho^2}\bar\sigma V_{\bar r}\right)^2\Bigg\}\Bigg]=0\end{aligned}\tag{3.10}$$

3.3　相似拡大的頑健効用に基づく確率制御

頑健効用において曖昧性の回避度合を表す θ は一定で状態に独立である。Maenhout (2004) は曖昧性の回避度合を状態変数 $Y_t=(W_t,r_t,\bar r_t)$ に依存出来るように $\theta=\theta(Y_t)$ に拡張した「一般化頑健効用族」を提案している。

このとき、HJB 方程式 (3.10) は次のようになる。

$$\begin{aligned}\sup_{(c,\varphi)}\Bigg[&\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V-\beta V+\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\\&-\frac{\theta(Y_t)}{2}\Bigg\{\left(\frac{1}{\bar\tau}\int_0^{\bar\tau}\varphi_t(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau\,W_tV_W+\sigma V_r+\rho\bar\sigma V_{\bar r}\right)^2\\&+\left(\frac{1}{\bar\tau}\int_0^{\bar\tau}\varphi_t(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau\,W_tV_W+\sqrt{1-\rho^2}\bar\sigma V_{\bar r}\right)^2\Bigg\}\Bigg]=0\end{aligned}\tag{3.11}$$

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から最適消費・投資比率密度 (c^*,φ^*) は次式を満たしている。

$$c_t^*=V_W^{-\frac{1}{\gamma}}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar\tau}\int_0^{\bar\tau}\varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau=&-\frac{V_W}{W_t(V_{WW}-\theta(Y_t)V_W^2)}\lambda_1\\&+\frac{V_{Wr}-\theta(Y_t)V_WV_r}{W_t(V_{WW}-\theta(Y_t)V_W^2)}\sigma+\frac{V_{W\bar r}-\theta(Y_t)V_WV_{\bar r}}{W_t(V_{WW}-\theta(Y_t)V_W^2)}\rho\bar\sigma\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\frac{1}{\bar\tau}\int_0^{\bar\tau}\varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau=-\frac{V_W}{W_t(V_{WW}-\theta(Y_t)V_W^2)}\lambda_2+\frac{V_{W\bar r}-\theta(Y_t)V_WV_{\bar r}}{W_t(V_{WW}-\theta(Y_t)V_W^2)}\sqrt{1-\rho^2}\bar\sigma\tag{3.14}$$

留意点 3. 最適消費 *(3.12)* 式は不確実性が存在しない場合の最適消費 *(2.12)* 式と一致しているが、債券ポートフォリオの最適投資比率の変化を通して間接的に頑健制御に影響されている。一方、最適投資比率は直接的に頑健制御の影響を受けている。投資家が曖昧性中立的（$\theta(w)=0$）な場合は不確実性が存在しない場合の最適投資比率 *(2.14)* と一致するが、投資家が曖昧性回避的な場合は近視眼的需要項と保険需要項に頑健制御に基づく新たな項が付加されている。

HJB 方程式に (3.12)(3.13)(3.14) 式を代入して整理すると、次の V に関する 2 階の偏微分方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}\bar{r}}+\rho\sigma\bar{\sigma}V_{r\bar{r}} \\
&+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau\,W_t\Big\{\lambda_1 V_W-\Big(V_{Wr}-\theta(Y_t)V_W V_r\Big)\sigma-\Big(V_{Wr}-\theta(Y_t)V_W V_{\bar{r}}\Big)\rho\bar{\sigma}\Big\} \\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau\,W_t\Big\{\lambda_2 V_W-\Big(V_{W\bar{r}}-\theta(Y_t)V_W V_r\Big)\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}\Big\} \\
&\quad+r_t W_t V_W+\kappa(\bar{r}_t-r_t)V_r+\kappa(\bar{r}-\bar{r}_t)V_{\bar{r}}-\beta V+\frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}=0 \quad (3.15)
\end{aligned}
$$

上記偏微分方程式は一般に解析的に解けない。また、一般化頑健効用は、効用汎関数が備えるべきとされる望ましい性質である「相似拡大性 (homotheticity)」を一般に有していない。[3]Maenhout (2004) は一般化頑健効用が相似変換性を有するように特定化された「相似拡大的頑健効用（homothetic robust utility)」を提案している。以下では、投資家の効用汎関数が相似拡大的頑健効用と仮定する。

仮定 4. 投資家の効用汎関数は一般頑健効用における $\theta(Y_t)$ が次式で定義される相似拡大的頑健効用である。

$$\theta(Y_t)=\frac{\delta}{(1-\gamma)V(Y_t)} \tag{3.16}$$

ここで、δ は曖昧性の回避度合を表す正の定数。

このとき、HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から最適消費 c^* は (3.12) 式、最適投資比率密度 φ^* は次の二つの条件式を満たしている。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau=&-\frac{V_W}{W_t\Big(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\Big)}\lambda_1 \\
&+\frac{V_{Wr}-\frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V}}{W_t\Big(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\Big)}\sigma+\frac{V_{W\bar{r}}-\frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{W_t\Big(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\Big)}\rho\bar{\sigma} \quad (3.17)
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau=-\frac{V_W}{W_t\Big(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\Big)}\lambda_2+\frac{V_{W\bar{r}}-\frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{W_t\Big(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\Big)}\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma} \tag{3.18}$$

最適消費 (3.12) 式と最適投資条件 (3.17)(3.18) 式を偏微分方程式 (3.21) に代入して得られる V に関する 2 階の偏微分方程式から値関数がナイトの不確実性が存在しない場合の値関数と同一の関数形 (2.15) をとることが容易に推測される。

[3]因みに、頑健効用（$\theta(Y_t)=\theta$）の場合も解析的に解けないほか、相似拡大性を有していない。

このとき、値関数 V に偏微分を施し、最適投資比率密度 (3.17)(3.18) 式に代入すると、φ^* は次の二つの条件式を満たしている。

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau = \frac{1}{\gamma+\delta}\,\lambda_1 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\sigma\frac{H_r}{H} - \rho\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau = \frac{1}{\gamma+\delta}\,\lambda_2 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{3.20}$$

留意点 4. 最適投資比率密度 *(3.19)(3.20)* 式をナイトの不確実性が存在しない場合（$\delta = 0$）の最適投資比率密度と比較すると、近視眼的需要項と金利・平均金利変動保険需要項への加重平均の重み付けが、ナイトの不確実性が存在しない場合の相対的危険許容度 $1/\gamma$ と *1* から相対的危険許容度を差し引いた値ではなく、$1/(\gamma+\delta)$ と $1-1/(\gamma+\delta)$ となっている。同結果から、δ は「相対的曖昧性回避度」と呼ぶべき役割を果たしている。そこで、危険と曖昧性を総称して「不確実性」と呼ぶのであれば、差し当たり $\gamma+\delta$ は「相対的不確実性回避度」、$1/(\gamma+\delta)$ は「相対的不確実性許容度」と呼べよう。このとき、相似拡大的頑健効用下の最適債券投資比率における近視眼的需要項と金利・平均金利変動保険需要項は、近視眼的需要項と金利・平均金利変動保険需要項に対しそれぞれを相対的不確実性許容度と *1* から相対的不確実性許容度を差し引いた値で重み付けた加重平均となっている。従って、ナイトの不確実性が存在しない場合に比べ、債券投資比率自体に見かけ上大きな差異はないものの、債券需要の内訳は、曖昧性に対する頑健制御の影響によって、近視眼的需要から金利・平均金利変動保険需要へ移行している。これは、ナイトの不確実性に起因する曖昧性を回避しようとする投資家は目先よりも将来を重視している、と自然に解釈される。

命題 2. 仮定 *1*・*2*・*4* の下、消費と債券ポートフォリオの最適化問題の値関数を構成する関数 $H(r_t, \bar{r}_t)$ は次の *2* 階の偏微分方程式の解である。

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right) + \rho\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right) \\
&\quad + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2 + \bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2 + \rho\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\} \\
&\quad + \left(\kappa(\bar{r}_t - r_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda_1\sigma\right)\left(\frac{H_r}{H}\right) \\
&\quad + \left(\bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\left(\lambda_1\rho + \lambda_2\sqrt{1-\rho^2}\right)\bar{\sigma}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\|\lambda\|^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}r_t + \frac{\beta}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{H}\right) = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

証明. 命題 1 と同様なので省略する。 □

投資家が曖昧性中立的（$\delta = 0$）な場合、上記常微分方程式は不確実性が存在しない場合の金利関数の偏微分方程式 (2.16) 式と一致することが確認出来る。

4　相似拡大的頑健効用最大化問題の近似解析解

本章では、前章で導出された値関数を構成する金利・平均金利の 2 変数関数の偏微分方程式の近似解析解を Campbell and Viceira (2002) と楠田 (2013a) の手法に沿って導出する。

4.1　金利関数の偏微分方程式の非斉次項近似

偏微分方程式 (3.21) の近似解析解を導出するため、非斉次項を Campbell and Viceira (2002) が CRRA 効用と 1 ファクター金利モデルを仮定し、消費と 2 証券（安全証券と 1 債券）ポートフォリオの最適化問題で導出した常微分方程式の近似解析解を導出する際に用いた手法に則して対数線形近似する。まず、(2.12) 式と値関数 (2.15) から $1/H(r_t) = c_t/W_t$ が成立していることに留意し、$1/H(r_t)$ を次のように $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで[4]対数線形近似する。

$$\frac{1}{H(r_t)} \approx h_0 - h_1 \log H(r_t) \tag{4.1}$$

ここで、$h_0 = h_1(1 - \log h_1)$、

$$h_1 = \exp\Big(\lim_{t\to\infty} E\Big[\log\Big(\frac{c_t}{W_t}\Big)\Big]\Big) \tag{4.2}$$

(4.1) 式を偏微分方程式の最終項に代入すると、次の近似偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right) + \rho\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right) \\
&\quad + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2 + \bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2 + \rho\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\} \\
&\quad + \left(\kappa(\bar{r}_t - r_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda_1\sigma\right)\left(\frac{H_r}{H}\right) \\
&\quad + \left(\bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\left(\lambda_1\rho + \lambda_2\sqrt{1-\rho^2}\right)\bar{\sigma}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\|\lambda\|^2 + \frac{(\gamma-1)}{\gamma}r_t + \frac{\beta}{\gamma} - h_0\right) - h_1\log H = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

[4] Campbell and Viceira (2002) は $E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似しているが、この場合、$E[\log c_t - \log W_t]$ は r と r_t に依存する。そこで、一定値をとる $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似を行っている。

4.2 近似解析解

近似偏微分方程式 (4.3) の解が次式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される。

$$H(r_t, \bar{r}_t) = \exp\left(a_0 + a_1 r_t + a_2 \bar{r}_t + \frac{1}{2}a_{11} r_t^2 + a_{12} r_t \bar{r}_t + \frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right) \quad (4.4)$$

金利・平均金利の 2 変数関数 (4.4) に偏微分を施し、近似偏微分方程式 (4.3) に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\Big(a_{11} + \big(a_1 + a_{11}r_t + a_{12}\bar{r}_t\big)^2\Big) + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\Big(a_{22} + \big(a_2 + a_{12}r_t + a_{22}\bar{r}_t\big)^2\Big) \\
&\qquad + \rho\sigma\bar{\sigma}\Big(a_{12} + \big(a_1 + a_{11}r_t + a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2 + a_{12}r_t + a_{22}\bar{r}_t\big)\Big) \\
&+ \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big\{\sigma^2\big(a_1 + a_{11}r_t + a_{12}\bar{r}_t\big)^2 + \bar{\sigma}^2\big(a_2 + a_{12}r_t + a_{22}\bar{r}_t\big)^2 \\
&\qquad + \rho\sigma\bar{\sigma}\big(a_1 + a_{11}r_t + a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2 + a_{12}r_t + a_{22}\bar{r}_t\big)\Big\} \\
&+ \left(\kappa(\bar{r}_t - r_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\lambda_1\right)\big(a_1 + a_{11}r_t + a_{12}\bar{r}_t\big) + \Bigg(\bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t) \\
&\qquad + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\bar{\sigma}\left(\rho\lambda_1\sqrt{1-\rho^2}\lambda_2\right)\Bigg)\big(a_2 + a_{12}r_t + a_{22}\bar{r}_t\big) \\
&\qquad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\|\lambda\|^2 + \frac{(\gamma-1)}{\gamma}r_t + \frac{\beta}{\gamma} - h_0\right) \\
&\qquad - h_1\left(a_0 + a_1 r_t + a_2\bar{r}_t + \frac{1}{2}a_{11}r_t^2 + a_{12}r_t\bar{r}_t + \frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right) = 0 \quad (4.5)
\end{aligned}$$

上式は $(r_t, \bar{r}_t, r_t^2, r_t\bar{r}_t, \bar{r}_t^2)$ に関する恒等式であるから、$(a_0, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22})$ に関する連立方程式が得られる。また、(h_0, h_1) は (4.2) 式より次の連立方程式を満たしている。

$$\begin{aligned}
h_0 &= h_1(1 - \log h_1) && (4.6) \\
h_1 &= \exp\left(-a_0 - a_1\bar{r} - \frac{1}{2}a_{11}\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa} + \bar{r}^2\right)\right) && (4.7)
\end{aligned}$$

これらを結合した連立方程式を数値解法によって解けば、$(a_0, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}, h_0, h_1)$ が求められる。

求められた数値解を代入して、近似値関数、近似最適消費、近似最適投資比率密度が満たす二つの条件式が次のように求まる。

$$\begin{aligned}
V(W_t, r_t, \bar{r}_t) = \exp\Bigg[\gamma\Big\{&a_0 + a_1 r_t + a_2\bar{r}_t \\
&+ \frac{1}{2}a_{11}r_t^2 + a_{12}r_t\bar{r}_t + \frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\Big\}\Bigg]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

$$c_t^* \;=\; \exp\Bigl[-a_0 \,-\, a_1 r_t \,-\, a_2 \bar{r}_t \,-\, \frac{1}{2} a_{11} r_t^2 \,-\, a_{12} r_t \bar{r}_t \,-\, \frac{1}{2} a_{22} \bar{r}_t^2\Bigr] W_t \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau) \sigma_1(\tau) d\tau = \frac{1}{\gamma+\delta}\,\lambda_1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$$
$$\times \Bigl(-\bigl(\sigma a_1 + \rho \bar{\sigma} a_2\bigr) - \bigl(\sigma a_{11} + \rho \bar{\sigma} a_{12}\bigr) r_t - \bigl(\sigma a_{12} + \rho \bar{\sigma} a_{22}\bigr) \bar{r}_t\Bigr) \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau) \sigma_2(\tau) d\tau = \frac{1}{\gamma+\delta}\,\lambda_2 + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$$
$$\times \Bigl(-\sqrt{1-\rho^2}\,\bar{\sigma}\bigl(a_2 + a_{12} r_t + a_{22} \bar{r}_t\bigr)\Bigr) \quad (4.11)$$

近似最適投資比率密度が満たす二つの条件式 (4.10)(4.11) は、この種の複雑なポートフォリオ最適化問題で示されている多くの結果と同様に、金利・平均金利と最適投資比率の関数関係が不明確なほか、金利関数の係数の数値解法負担が重いため、実証分析が困難である。次章では、追加的仮定を設けることにより、上記関数関係が明確で、且つ数値解法負担が軽く実証分析の容易な近似解析解を導出するが、その前に近似最適ポートフォリオの代表的具体例をみておく。

4.3　近似最適ポートフォリオの代表的具体例

近似最適ポートフォリオの代表的な具体例を二つ示す。以下では、(4.10) 式と (4.11) 式の右辺の項をそれぞれ q_{1t}, q_{2t} とする。先ず、投資家が満期までの期間が固定された異なる 2 種類の債券 (τ_1, τ_2) のみに投資する場合を考察する。各債券の最適投資比率を $(\varPhi_1^*, \varPhi_2^*)$ とすると、(4.10)(4.11) 式より、各債券の近似最適投資比率は次の二つの条件式を満たしている。

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(\tau_1) & \sigma_1(\tau_2) \\ \sigma_2(\tau_1) & \sigma_2(\tau_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varPhi_{1t}^* \\ \varPhi_{2t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1t} \\ q_{2t} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

従って、この場合の最適投資比率は次のように求められる。

$$\begin{pmatrix} \varPhi_{1t}^* \\ \varPhi_{2t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(\tau_1) & \sigma_1(\tau_2) \\ \sigma_2(\tau_1) & \sigma_2(\tau_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_{1t} \\ q_{2t} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

すなわち、

$$\varPhi_{1t}^* \;=\; \frac{1}{\sigma_1(\tau_1)\sigma_2(\tau_2) - \sigma_1(\tau_2)\sigma_2(\tau_1)}\Bigl(\sigma_2(\tau_2) q_{1t} - \sigma_1(\tau_2) q_{2t}\Bigr) \quad (4.14)$$
$$\varPhi_{2t}^* \;=\; \frac{1}{\sigma_1(\tau_1)\sigma_2(\tau_2) - \sigma_1(\tau_2)\sigma_2(\tau_1)}\Bigl(-\sigma_2(\tau_1) q_{1t} + \sigma_1(\tau_1) q_{2t}\Bigr) \quad (4.15)$$

次に、投資家が満期の異なる債券を短中期債券群 $(0, \tau_M]$ と中長期債券群 $(\tau_M, \bar{\tau}]$ の二つに分類し、各債券群内の投資比率密度は一様分布とする投資

を行う場合を考察する。各債券群の最適投資比率密度を $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ とすると、(4.10)(4.11) 式より、各債券の近似最適投資比率は次の二つの条件式を満たしている。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_1(\tau) d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_1(\tau) d\tau \\ \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_2(\tau) d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_2(\tau) d\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1t}^* \\ \varphi_{2t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1t} \\ q_{2t} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

従って、この場合の最適投資比率密度は次のように求められる。

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1t}^* \\ \varphi_{2t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_1(\tau) d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_1(\tau) d\tau \\ \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_2(\tau) d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_2(\tau) d\tau \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_{1t} \\ q_{2t} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \varphi_{1t}^* = & \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_1(\tau) d\tau \, \frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_2(\tau) d\tau - \frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_1(\tau) d\tau \, \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_2(\tau) d\tau \right)^{-1} \\ & \times \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_2(\tau) d\tau \, q_{1t} - \frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_1(\tau) d\tau \, q_{2t} \right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2t}^* = & \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_1(\tau) d\tau \, \frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_2(\tau) d\tau - \frac{1}{\bar{\tau}} \int_{\tau_M}^{\bar{\tau}} \sigma_1(\tau) d\tau \, \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_2(\tau) d\tau \right)^{-1} \\ & \times \left(-\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_2(\tau) d\tau \, q_{1t} + \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\tau_M} \sigma_1(\tau) d\tau \, q_{2t} \right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

5　関数関係が明確で実証分析の容易な近似解析解

本章では、金利モデルのパラメータ間の関係性の仮定を付加することにより、金利・平均金利と最適投資比率の関数関係が明確で、且つ数値解法負担が軽く実証分析の容易な近似解析解を導出する。

5.1　追加的仮定と近似最適解

平均金利は金利に比べ平均回帰速度と分散が有意に小さいとみられるほか、金利・平均金利間の相関も相当程度低いとみられることから、次の仮定を置く。

仮定 5. 金利モデルのパラメータ $\sigma, \bar{\sigma}, \rho, \kappa, \bar{\kappa}$ の間に次の関係式が成立している。

$$\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2, \ \rho \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \ \left(\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)^2 \approx 0 \tag{5.1}$$

前章で導出された (4.5) 式より、次の連立方程式を得る。

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \left(\sigma^2 a_{11}^2 + \rho\sigma\bar{\sigma} a_{12} + \bar{\sigma}^2 a_{12}^2 \right) - (h_1 + 2\kappa) a_{11} = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\bar{\sigma}^2 a_{22}^2+2\rho\sigma\bar{\sigma}a_{12}a_{22}+\sigma^2 a_{12}^2\right)-(h_1+2\bar{\kappa})a_{22}+2\kappa a_{12}=0 \tag{5.3}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\sigma^2 a_{11}a_{12}+\bar{\sigma}^2 a_{12}a_{22}+\rho\sigma\bar{\sigma}(a_{11}a_{22}+a_{12}^2)\right) + \kappa a_{11}-(\kappa+\bar{\kappa}+h_1)a_{12}=0 \tag{5.4}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\sigma^2 a_1 a_{11}+\bar{\sigma}^2 a_2 a_{12}+\rho\sigma\bar{\sigma}(a_1 a_{12}+a_2 a_{11})\right) + \frac{(\gamma+\delta-1)\lambda_1\sigma}{\gamma+\delta}a_{11}+\left(\frac{(\gamma+\delta-1)(\lambda_1\rho+\lambda_2\sqrt{1-\rho^2})\bar{\sigma}}{\gamma+\delta}+\kappa\bar{r}\right)a_{12} -(h_1+\kappa)a_1-\frac{\gamma-1}{\gamma}=0 \tag{5.5}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\sigma^2 a_1 a_{12}+\bar{\sigma}^2 a_2 a_{22}+\rho\sigma\bar{\sigma}(a_1 a_{22}+a_2 a_{12})\right) + \frac{(\gamma+\delta-1)\lambda_1\sigma}{\gamma+\delta}a_{12}+\left(\frac{(\gamma+\delta-1)(\lambda_1\rho+\lambda_2\sqrt{1-\rho^2})\bar{\sigma}}{\gamma+\delta}+\bar{\kappa}\bar{r}\right)a_{22} +\kappa a_1-(h_1+\bar{\kappa})a_2=0 \tag{5.6}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}a_{11}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}a_{22}+\rho\sigma\bar{\sigma}a_{12}+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\sigma^2 a_1^2+\bar{\sigma}^2 a_2^2\right) +\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\rho\sigma\bar{\sigma}a_1 a_2+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\left(\lambda_1 a_1+\left(\lambda_1\rho+\lambda_2\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}a_2\right)\right) +\frac{1-\gamma}{2\gamma(\gamma+\delta)}\|\lambda\|^2-\beta h_0-h_1 a_0=0 \tag{5.7}$$

上記連立方程式に近似式 (5.1) 式を適用すると、(5.2) 式より、$a_{11}\approx 0$、或いは、

$$a_{11}\approx\frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{h_1+2\kappa}{\sigma^2} \tag{5.8}$$

が得られる。以下では、$a_{11}\approx 0$ に対応する近似解を「低次の近似解」、(5.8) 式の a_{11} に対応する近似解を「高次の近似解」と呼ぶ。

5.2 低次の近似解

低次の近似解については、$a_{11}\approx 0$ を (5.4)(5.3) 式に代入すると、$a_{12}, a_{22}\approx 0$ が得られる。これらを (5.5)(5.6) 式に代入すると、

$$a_1 \approx \frac{1-\gamma}{\gamma(h_1+\kappa)} \tag{5.9}$$

$$a_2 \approx \frac{(1-\gamma)\kappa}{\gamma(h_1+\kappa)(h_1+\bar{\kappa})} \tag{5.10}$$

a_0 は $a_{11}, a_{12}, a_{22} \approx 0$ と上式を (5.7) 式に代入して得られ、(h_0, h_1) は (4.6)(4.7) 式の数値解法により求まる。以上より、近似最適投資比率密度は次の二つの条件式を満たす。

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau \approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_1 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{(h_1+\kappa)\sigma+\kappa\rho\bar{\sigma}}{(h_1+\kappa)(h_1+\bar{\kappa})} \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau \approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_2 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\kappa\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}}{(h_1+\kappa)(h_1+\bar{\kappa})} \quad (5.12)$$

(5.11)(5.12) 式は、最適債券投資比率が短期金利にも平均短期金利にも依存しない一定値となることが示されている。

5.3 高次の近似解

以下では、高次の近似解を導出する。(5.2) 式を (5.4)(5.3) 式に代入すると、(a_{12}, a_{22}) が次のように求まる。

$$a_{12} \approx -\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)a_{11} \quad (5.13)$$

$$a_{22} \approx -\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)a_{12} \approx \left(1+\frac{2\bar{\kappa}}{\kappa}\right)a_{11} \quad (5.14)$$

(5.8)(5.13)(5.14) 式を (5.5)(5.6) 式に代入すると、(a_1, a_2) が次のように求まる。

$$a_1 \approx -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{(h_1+2\kappa)(\lambda_1\sigma-\lambda_2\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma})-\sigma^2}{\kappa\sigma^2}\right)-\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}a_{12}\bar{r} \quad (5.15)$$

$$a_2 \approx \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{h_1+2\kappa}{h_1+\bar{\kappa}}\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right) \times \left\{\frac{(h_1+\kappa)\lambda_1\sigma-(h_1+3\kappa)\lambda_2\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}-\sigma^2}{\kappa\sigma^2}-\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}a_{11}\bar{r}\right\}+\frac{\bar{\kappa}}{h_1+\bar{\kappa}}a_{22}\bar{r} \quad (5.16)$$

(a_0, h_0, h_1) を同様に求め、最適投資比率密度が満たす条件式 (4.10)(4.10) に (5.8)(5.13)-(5.16) 式を代入し、)5.1) 式を用いると、次の命題を得る。

命題 3. 仮定 *1・2・4・5* の下、消費と債券ポートフォリオの最適化問題における高次の解に対応する近似最適投資比率密度は次の二つの条件式を満たす。

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau \approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_1 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{(h_1+2\kappa)(\lambda_1\sigma-\lambda_2\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma})-\sigma^2}{\kappa\sigma} + \frac{h_1+2\kappa}{\sigma}\left\{\left(\bar{r}_t-r_t\right)+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\left(\bar{r}_t-\bar{r}\right)\right\} \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau \approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_2 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(-\frac{(h_1+2\kappa)\{(h_1+\kappa)\lambda_1-\sigma\}\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}}{\kappa(h_1+\bar{\kappa})\sigma}\right) - \frac{(h_1+2\kappa)\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}}{\sigma^2}\left(\bar{r}_t - r_t\right) \quad (5.18)$$

留意点 5. 近似最適投資比率密度が満たす条件式 *(5.17)(5.18)* 式は、前章で導出された条件式 *(4.10)(4.11)* に比べ、短期金利と平均短期金利が投資比率に与える影響が明確な関数関係で示されており、実証分析を容易にしていることがみてとれる。

参考文献

[1] Anderson, E. W., L. P. Hansen, and T. J. Sargent (2003), "A Quartet of Semi-groups for Model Specification, Robustness, Prices of Risk, and Model Detection," *Journal of the European Economic Association*, 1, 68-123.

[2] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2001), Appendix to *Strategic Asset Allocation*, on http://kuznets.fas.harvard.edu/ campbell/papers.html.

[3] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2002), *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, NY.

[4] Duffee, G. R. (2002), "Term Premia and Interest Forecast in Affine Models," *Journal of Finance*, 57, 405-43

[5] Duffie, D. and R. Kan (2002), "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, 6, 379-406.

[6] Hull, J. C. and A. White (1994), "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two Factor Models," *Journal of Derivatives*, 2, 37-48.

[7] Knight, F. H. (1921), *Rsik, Uncertainty, and Profit*, Boston: Houghton Mifflin.

[8] Kusuda, K. (2006), "A Robust Recursive Utility under Jump-Diffusion Information," Working Paper B-9, Center for Risk Research, Faculty of Economics, Shiga University.

[9] Maenhout, P. J. (2004), "Robust Portfolio Rules and Asset Pricing," *The Review of Financial Studies* 17, 4, 951-84.

[10] Vasicek, O. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 5, 177-88.

[11] 楠田浩二 (2013a)「消費と債券投資の多期間最適化問題における高次の近似解析解」Discussion Paper J-35、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

[12] 楠田浩二 (2013b)「頑健効用に基づく消費と債券投資の多期間最適化」Discussion Paper J-38、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

A 証明

A.1 補題 1 の証明

標準ウィーナー過程 (z_1, z_2) とリスクの市場価格 (λ_1, λ_2) により

$$z_{it}^* = z_{it} + \int_0^t \lambda_i \, ds \qquad i = 1, 2 \tag{A.1}$$

で定義される確率過程 (z_1^*, z_2^*) は、ギルサノフの定理より、リスク中立確率における標準ウィーナー過程である。よって、本稿の 2 ファクター金利モデルは、リスク中立確率下の標準ウィーナー過程 (z_1^*, z_2^*) を用いて

$$\begin{aligned} dr_t &= \Big(\kappa\big(\bar{r}_t - r_t\big) - \sigma\lambda_1\Big)\, dt + \sigma\, dz_{1t}^* \\ d\bar{r}_t &= \Big(\bar{\kappa}\big(\bar{r} - \bar{r}_t\big) - \bar{\sigma}\big(\rho\lambda_1 + \sqrt{1-\rho^2}\lambda_2\big)\Big)\, dt + \rho\,\bar{\sigma}\, dz_{1t}^* + \sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}\, dz_{2t}^* \end{aligned}$$

と表現される。

今、割引債 B^T を状態変数 $(r, \bar{r}_t, t)$ の上に書かれた派生資産と看做すと、滑らかな関数 $f(r_t, \bar{r}_t, t)$ により、

$$B_t^T = f(r_t, \bar{r}_t, t) \tag{A.2}$$

と表記される。このとき、無裁定条件から、f は次の偏微分方程式の境界値問題の解となっていることが示される。

$$f_t + \mu_t f_r + \bar{\mu}_t f_{\bar{r}} + \frac{\sigma^2}{2} f_{rr} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} f_{\bar{r}\bar{r}} + \rho\sigma\bar{\sigma} f_{r\bar{r}} - rf = 0 \tag{A.3}$$

$$\text{境界条件：}\quad f(T) = 1 \tag{A.4}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mu_t &= \kappa\big(\bar{r}_t - r_t\big) - \sigma\lambda_1 \\ \bar{\mu}_t &= \bar{\kappa}\big(\bar{r} - \bar{r}_t\big) - \bar{\sigma}\big(\rho\lambda_1 + \sqrt{1-\rho^2}\lambda_2\big) \end{aligned}$$

一方、本 2 ファクター・モデルはアフィン・モデルなので、上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 b_0, b_1, b_2 によって

$$f(r_t, \bar{r}_t, t) = e^{-b_0(t) - b_1(t) r_t - b_2(t) \bar{r}_t} \tag{A.5}$$

$$\text{境界条件：} \quad b_0(T) = b_1(T) = b_2(T) = 0 \tag{A.6}$$

と書けることが示される。(A.5) 式に偏微分を施し、(A.3) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&- b_0' - b_1' r_t - b_2' \bar{r}_t - \Big(\kappa \big(\bar{r}_t - r_t \big) - \sigma \lambda_1 \Big) b_1 \\
&- \Big(\bar{\kappa} \big(\bar{r} - \bar{r}_t \big) - \bar{\sigma} \big(\rho \lambda_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \lambda_2 \big) \Big) b_2 + \frac{\sigma^2}{2} b_1^2 + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} b_2^2 + \rho \sigma \bar{\sigma} b_2 b_3 - r_t = 0
\end{aligned} \tag{A.7}$$

上式は、$(r_t, \bar{r}_t)$ に関する恒等式であるから (b_0, b_1, b_2) は次の連立常微分方程式の解である。

$$b_1' = \kappa b_1 - 1 \tag{A.8}$$

$$b_2' = \bar{\kappa} b_2 - \kappa b_1 \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
b_0' = \sigma \lambda_1 b_1 - \Big(\bar{\kappa} \bar{r} + \bar{\sigma} (\rho \lambda_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \lambda_2) \Big) b_2 \\
+ \frac{\sigma^2}{2} b_1^2 + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} b_2^2 + \rho \sigma \bar{\sigma} b_2 b_3
\end{aligned} \tag{A.10}$$

(A.8) 式は線形微分方程式であるから、定数変化法を用いて、

$$b_1(t) = \frac{1}{\kappa} \Big(1 - e^{-\kappa (T - t)} \Big) \tag{A.11}$$

解ける。上式を (A.9) 式に代入すると、これも線形微分方程式であるから、定数変化法を用いて、次のように解ける。

$$b_2(t) = \frac{1}{\bar{\kappa}} \Big(1 - e^{-\bar{\kappa}(T - t)} \Big) + \frac{1}{\kappa - \bar{\kappa}} \Big(e^{-\kappa (T - t)} - e^{-\bar{\kappa}(T - t)} \Big) \tag{A.12}$$

(A.11)(A.1) 式を (A.5) 式に代入して、債券価格 B^T の従う確率微分方程式を導出すると、補題 1 が証明される。

A.2　命題 1 の証明

先ず、CRRA 効用下の最適化問題の値関数 (2.15) 式に偏微分を施すと、次式を得る。

$$\begin{aligned}
&W_t V_W = (1-\gamma) V, \quad W_t^2 V_{WW} = -\gamma (1-\gamma) V, \quad V_r = \gamma \frac{H_r}{H} V, \quad V_{\bar{r}} = \gamma \frac{H_{\bar{r}}}{H} V, \\
&W_t V_{Wr} = \gamma (1 - \gamma) \frac{H_r}{H} V, \quad W_t V_{W_t \bar{r}} = \gamma (1 - \gamma) \frac{H_{\bar{r}}}{H} V, \\
&V_{rr} = \gamma \left\{ \frac{H_{rr}}{H} + (\gamma - 1) \left(\frac{H_r}{H} \right)^2 \right\} V, \quad V_{\bar{r}\bar{r}} = \gamma \left\{ \frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H} + (\gamma - 1) \left(\frac{H_{\bar{r}}}{H} \right)^2 \right\} V, \\
&V_{r\bar{r}} = \gamma \left\{ \frac{H_{r\bar{r}}}{H} + (\gamma - 1) \left(\frac{H_r}{H} \right) \left(\frac{H_{\bar{r}}}{H} \right) \right\} V
\end{aligned} \tag{A.13}$$

HJB 方程式 (2.9) における消費過程 c 関連項は、最適消費 (2.12) 式を代入し、(A.13) 式を用いると、

$$\frac{c^{*1-\gamma}}{1-\gamma} - c^* = \gamma \frac{V}{H} \tag{A.14}$$

を得る。

HJB 方程式 (2.9) における投資比率 φ 関連項は σ_1 関連項と σ_2 関連項に分けて計算する。σ_1 関連項は最適投資比率密度条件 (2.13)(2.14) 式と (A.13) 式を用いると、次のように整理される。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau\,\lambda_i\right) W_t V_W + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau\,\lambda_i\right)^2 W_t^2 V_{WW}\\ &\quad - \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau\,\sigma\, W_t V_{Wr} - \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau\rho\sigma W_t V_{W\bar{r}}\\ &\quad = -\frac{1-\gamma}{2\gamma}\Big(\lambda_1 - \gamma\sigma\frac{H_r}{H} - \gamma\rho\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\Big)^2 V\end{aligned} \tag{A.15}$$

σ_2 関連項も同様にして次のように整理される。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau\,\lambda_2 W_t V_W + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau\,\lambda_2\right)^2 W_t^2 V_{WW}\\ &\quad - \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t^*(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma} W_t V_{W\bar{r}}\\ &\quad = -\frac{1-\gamma}{2\gamma}\Big(\lambda_2 - \gamma\sqrt{1-\rho^2}\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\Big)^2 V\end{aligned} \tag{A.16}$$

(A.13)-(A.16) 式を HJB 方程式 (2.9) に代入し整理すると、命題 1 における (2.16) が得られる。