CRR DISCUSSION PAPER SERIES　J

Discussion Paper No. J-35

消費と債券投資の多期間最適化問題における
高次の近似解析解

楠田　浩二

2013 年 3 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-35

消費と債券投資の多期間最適化問題における高次の近似解析解

楠田　浩二[1]

2013 年 3 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY
1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒 522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

キーワード: 確率制御、近似解析解、金利リスク、債券投資、多期間最適ポートフォリオ

JEL 分類番号: C62、D14、G11

概 要

Campbell and Viceira (2002) は相対的危険回避度一定の期待効用関数と金利のバシチェック・モデルを仮定し、消費と債券投資の多期間最適化問題における近似解析解を確率制御により導出した。しかし、同解における長期債の投資比率は金利低下局面では短期債から長期債へ、金利上昇局面では長期債から短期債へ移行する現実の投資行動を説明出来ない。本稿では、彼等が導出した近似常微分方程式において、彼等が示した解以外に高次の解が存在することを示す。高次の解における長期債の投資比率は上記投資行動を説明している。但し、何れの解が真の解の近似解であるかはモデルのパラメータに依存するため、実証分析の結果を待つ必要がある。

[1] 本稿は滋賀大学経済学部附属リスク研究センター東アジア保険プロジェクトにおける中国東北財経大学金融学院との共同研究の成果の一部である。

1　序論

安全性を重視する個人投資家向けの投資信託や長期債務を有する外資系生保等の機関投資家は短期債・長期債中心の運用を行っている場合が少なくないことを考慮すると、消費と短期債・長期債投資の最適化問題の考察は経済学的意義がある。Campbell and Viceira (2002) は、短期債と満期までの期間が一定の長期債を投資対象とする消費と投資の多期間最適化問題を相対的危険回避度一定の期待効用関数と金利のバシチェック・モデルを仮定して確率制御の手法で解いている。その結果、最適ポートフォリオの導出は金利の未知関数に関する非斉次の常微分方程式の求解問題に帰着されている。同方程式は Polyanin and Zaitsev (1995) に示されている解析解が存在するが、同解析解は解釈が非常に困難なガンマ関数を含む複雑な式である。そこで、彼等は同常微分方程式の非斉次項を対数線形近似し、近似解析解を与えている。他方、Kogan and Uppal (2002) は状態変数に金利を含む一般的資産への投資と消費の最適化問題に対し漸近展開により近似解析解を与えている。同近似解析解からは Campbell and Viceira (2002) の消費と債券投資の最適化問題に対応する近似解析解を導出出来るが、Campbell and Viceira (2002) は、Kogan and Uppal(2002) の近似解析解が彼等の導出した近似解析解の特殊な場合と解釈出来、しかも近似精度が低いことを指摘している。Campbell and Viceira (2002) の導出した近似解析解における長期債への最適投資比率は将来の投資機会集合の変化を考慮しない第 1 項の近視眼的需要と同変化に対し保険を掛ける第 2 項の保険需要から成るが、何れの項も一定で金利に依存しない。しかし、かかる結果は、低金利局面では短期債から長期債へ、高金利局面では長期債から短期債へ移行する現実の投資行動を説明出来ない。

本稿では、消費と債券投資の最適化問題における Campbell and Viceira (2002) の解法と近似解析解を再検討する。そして、彼等が導出した近似常微分方程式に彼等の示した解以外の高次の解が存在することを示す。そして、長期債の最適近似投資比率における保険需要に基づく項は、低金利局面では上昇し高金利局面では低下することを示しており、現実に観察される投資行動を説明している。但し、何れの解が値関数の最大化を導く真の解の近似解であるかはモデルのパラメータに依存する複雑な評価であることから、実証分析の結果を待つ必要がある。

本稿の次章以降の構成は以下の通りである。2 章では、Campbell and Viceira (2002) の消費と債券投資の多期間最適化問題と確率制御により導出される金利の未知関数の常微分法方程式の近似法を紹介する。3 章では、Campbell and Viceira (2002) による同常微分方程式の近似解析解を紹介した後、高次の近似解析解を導出する。4 章では、結論と今後の課題を示す。

2　Campbell and Viceira (2002) の債券投資問題と常微分方程式の近似

本章では、Campbell and Viceira (2002) で考察された消費と債券投資の最適化問題と、最適値関数の近似解析解を導出するため、彼等が行った金利の未知関数の常微分方程式近似法を紹介する。

2.1　環境と仮定

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。投資家の共通主観確率と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデル化されている。ここで、$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{T}}$ は一次元標準ブラウン運動 z によって生成される自然なフィルトレーションである。P の下での期待作用素を E、所与の $\mathcal{F}_t$ の下での条件付き期待作用素を E_t と表記する。

一種類の消費財、安全証券、割引債が任意の時点で市場で取引されている。割引債は任意の時点で発行され、発行時点の満期までの期間は τ とする。安全証券の価格を B、満期 T の割引債の価格を B^T と表記する。消費財空間は、消費過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty \quad a.s.$ を満たす非負値適合的過程の空間とする。

金利の変動過程については、金利が平均回帰傾向を有することを織り込んだ瞬間的スポット・レート・モデルであるバシチェック・モデルを仮定する。

仮定 1. 瞬間的スポット・レート r は次の *Ornstein-Uhlenbeck* 過程に従う。

$$dr_t = \kappa(\bar{r} - r_t)\,dt + \sigma\,dz_t$$

ここで、κ は平均金利への回帰速度、$\bar{r}$ は平均金利、σ は拡散係数をそれぞれ表す正の定数である。

このとき、割引債の Sharpe 測度は満期に依らず一定であり、満期 T の割引債価格のヴォラティリティは $\kappa^{-1}(1 - e^{-\kappa(T-t)})\sigma$ であることが示されている（Vasicek (1977)）。従って、割引債の Sharpe 測度を λ、$b(T-t) = \kappa^{-1}(1 - e^{-\kappa(T-t)})$ と表記すると、安全証券の価格 B と満期 T の割引債の価格 B^T は次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t\,dt \tag{2.1}$$

$$\frac{dB_t^T}{B_t^T} = \{r_t + \lambda b(T-t)\sigma\}\,dt - b(T-t)\sigma\,dz_t \tag{2.2}$$

以下では、安全証券を「短期債」、割引債を「長期債」と呼ぶ。

投資家の効用汎関数について、次の仮定を置く。

仮定 2. 投資家の効用汎関数は次式で表される相対的危険回避度一定の期待効用汎関数である。

$$u(c) = E\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,dt\right]$$

ここで、ρ は割引率、γ は相対的危険回避度をそれぞれ表す正の定数である。

2.2 確率制御による最適投資問題の解法

投資家は初期時点の金利 r を所与として与えられた富 w を短期債と新規発行長期債（満期までの期間 τ）のみに投資することによって効用関数を最大化する問題を解く。本問題を確率制御の手法で解くため、確率制御の諸概念、確率過程とその集合、関数等を導入する。

初期状態を $y = (w, r)$、富に対する新発長期債投資の比率の過程を φ と表記する。所与の投資比率過程 φ の下、富過程 W は次の予算制約式を満たす。

$$dW_t = \{(r_t + \varphi_t\lambda b(T-t)\sigma)W_t - c_t\}\,dt - \varphi_t b(T-t)\sigma W_t\,dz_t \tag{2.3}$$

予算制約式 (2.3) を満たす消費財・投資比率過程 (c, φ) を初期状態 y に対する許容的制御と呼び、許容的制御の集合を $\mathcal{C}(y)$ と表記する。このとき、最適投資問題は次式で定義される値関数 $V(y)$ の解析解を求める問題となる。

$$V(y) = \sup_{(c,\varphi)\in\mathcal{C}(y)} u(c) \tag{2.4}$$

本問題 (2.4) は次の Hamilton-jacobi-Bellman 方程式（以下、「HJB 方程式」）を解く問題に帰着される。

$$\sup_{(c,\varphi)}\left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(w,r) - \rho V(w,r) + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = 0$$

s.t. 横断条件

$$\lim_{T\to\infty} E[\,e^{-\rho T}V(W_T, r_T)\,] = 0$$

ここで、

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(w,r) = \{(r + \varphi_t\lambda b\sigma)w - c_t\}V_w + \kappa(\bar{r} - r)V_r \\ + \frac{1}{2}{\varphi_t}^2 w^2 b^2\sigma^2 V_{ww} - \varphi w b\sigma^2 V_{wr} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr}\end{aligned}$$

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から最適消費・最適投資比率 (c^*, φ^*) は次式を満たしている。

$$c^* = V_w^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{2.5}$$

$$\varphi^* = -\frac{V_w}{wV_{ww}}\frac{\lambda}{b\sigma} + \frac{V_{wr}}{wV_{ww}}\frac{1}{b} \tag{2.6}$$

上式を HJB 方程式に代入して得られる 2 階の偏微分方程式から値関数が次の関数形をとることが容易に推測される。

$$V(w,r) = \big(H(r)\big)^{\gamma} \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{2.7}$$

このとき、HJB 方程式の左辺の被最大化関数を $g(c,\varphi)$ と置くと、最大化の 2 階の条件も満たされていることが次式により確認出来る。

$$\begin{aligned}
&g_{cc}(c^*,\varphi^*) = -\gamma(c^*)^{-\gamma} < 0 \\
&g_{\varphi\varphi}(c^*,\varphi^*) = -\gamma(1-\gamma)b^2\sigma^2 V < 0 \\
&g_{cc}(c^*,\varphi^*)g_{\varphi\varphi}(c^*,\varphi^*) - (g_{c\varphi}(c^*,\varphi^*))^2 = g_{cc}(c^*,\varphi^*)g_{\varphi\varphi}(c^*,\varphi^*) > 0
\end{aligned}$$

(2.7) 式を HJB 方程式に代入して整理すると、次の常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma\sigma^2}{2(1-\gamma)}\left(\frac{H''}{H}\right) + \left(\frac{\gamma\kappa}{1-\gamma}(\bar{r}-r) - \lambda\sigma\right)\left(\frac{H'}{H}\right)& \\
+ \left(\frac{\lambda^2}{2\gamma} - \frac{\rho}{1-\gamma} + r\right) + \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{1}{H}\right) = 0&
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3 常微分方程式の非斉次項近似

常微分方程式 (2.8) は非斉次であるが、解析解が示されている（Polyanin and Zaisev (1995)）。しかし、Campbell and Viceira (2002) が指摘するように、同解析解は解釈が非常に困難なガンマ関数を含む複雑な式である。そこで、Campbell and Viceira (2002) は非斉次項を次の手順で対数線形近似している。まず、(2.6) 式と値関数 (2.7) から次の関係式が成立している。

$$\frac{1}{H(r_t)} = \frac{c_t}{W_t} \tag{2.9}$$

従って、$1/H(r_t)$ を次のように $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで[1]対数線形近似出来る。

$$\frac{1}{H(r_t)} \approx h_0 - h_1 \log H(r_t) \tag{2.10}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
h_0 &= \exp\left(\lim_{t\to\infty} E\left[\log\left(\frac{c_t}{W_t}\right)\right]\right)\left[1 - E\lim_{t\to\infty}\left[\log\left(\frac{c_t}{W_t}\right)\right]\right] \\
h_1 &= \exp\left(\lim_{t\to\infty} E\left[\log\left(\frac{c_t}{W_t}\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

[1]Campbell and Viceira (2002) は $E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似を行っている。しかし、この場合、$E[\log c_t - \log W_t]$ は r と r_t に依存する。そこで本稿では、一定値をとる $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似を行っている。

(2.10) 式を常微分方程式の最終項に代入すると、次の近似常微分方程式が得られる。

$$\frac{\gamma\sigma^2}{2(1-\gamma)}\left(\frac{H''}{H}\right)+\left(\frac{\gamma\kappa}{1-\gamma}(\bar{r}-r)-\lambda\sigma\right)\left(\frac{H'}{H}\right)+\frac{\lambda^2}{2\gamma}-\frac{\rho}{1-\gamma}+r$$
$$+\frac{\gamma}{1-\gamma}(h_0-h_1\log H)=0 \quad (2.11)$$

3 Campbell and Viceira (2002) の近似解析解と高次の近似解析解

本章では、近似常微分方程式 (2.11) に対する Campbell and Viceira (2001,2002) の近似解析解を紹介した後、高次の近似解析解を示す。

3.1 Campbell and Viceira (2002) の近似解析解

Campbell and Viceira (2002) は近似常微分方程式 (2.11) の解が次式で表される 1 次関数の指数関数であることは容易に分かるとしている。

$$H(r_t)=\exp(a_0'+a_1'r_t) \quad (3.1)$$

(3.1) 式を近似常微分方程式 (2.11) に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\gamma\sigma^2}{2(1-\gamma)}(a_1')^2+\left(\frac{\gamma\kappa}{1-\gamma}(\bar{r}-r)-\lambda\sigma\right)a_1'+\frac{\lambda^2}{2\gamma}-\frac{\rho}{1-\gamma}+r$$
$$+\frac{\gamma h_0}{1-\gamma}-\frac{\gamma h_1}{1-\gamma}(a_0'+a_1'r)=0 \quad (3.2)$$

上式は r に関する恒等式であるから、次の (a_0',a_1') に関する連立方程式が得られる。

$$-\frac{\gamma(h_1+\kappa)}{1-\gamma}a_1'+1=0 \quad (3.3)$$
$$\frac{\gamma\sigma^2}{2(1-\gamma)}(a_1')^2+\left(\frac{\gamma\kappa\bar{r}}{1-\gamma}-\lambda\sigma\right)a_1'+\frac{\lambda^2}{2\gamma}-\frac{\rho}{1-\gamma}+\frac{\gamma h_0}{1-\gamma}-\frac{\gamma h_1}{1-\gamma}a_0'=0 \quad (3.4)$$

(3.3) 式より、

$$a_1'=-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{h_1+\kappa} \quad (3.5)$$

a_0' は上式を (3.4) 式に代入して得られる。最後に、(h_0,h_1) については、h_1 を次の方程式の数値解法で求めた後、解を $h_0=h_1(1-\log h_1)$ に代入して求められる。

$$h_1=\exp\left(-(a_0'+a_1'\lim_{t\to\infty}E[r_t])\right)=\exp\left(-a_0'-a_1'\bar{r}\right)$$

以上より、近似値関数、近似最適消費、近似最適長期債投資比率が次のように求められる。

$$V(W_t, r_t) = \exp\left[\gamma\left\{a_0' - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{h_1+\kappa}r_t\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{3.6}$$

$$c_t^* = \exp\left(-a_0' + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{h_1+\kappa}r_t\right)W_t \tag{3.7}$$

$$\varphi_t^* = \frac{1}{\gamma}\frac{\lambda}{b(T-t)\sigma} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{b(T-t)(h_1+\kappa)} \tag{3.8}$$

留意点 1. *Kogan and Uppal (2001)* は状態変数に金利を含む一般的資産の最適化問題に対し $\gamma = 1$ の近傍における漸近展開により近似解析解を与えている。同近似解析解からは *Campbell and Viceira (2002)* の消費と債券投資の最適化問題に対応する近似解析解を導出できるが、*Campbell and Viceira (2002)* は、*Kogan and Uppal (2001)* の近似解析解が彼等の導出した近似解析解における $h_1 = \rho$ という特殊な場合と解釈出来、しかも近似精度が低いことを指摘している

留意点 2. *(3.8)* 式は、長期債の需要が一般的には将来の投資機会集合の変化を考慮しない第 *1* 項の近視眼的需要と同変化に対し保険を掛ける第 *2* 項の保険需要から成ることを示している。但し、対数効用（$\gamma = 1$）の場合、保険需要の項は消失する。これは、良く知られているように、対数効用の場合、将来の投資機会集合の変化から発生する代替効果と所得効果が完全に相殺する結果、同投資家の将来の投資機会集合の変化に対する保険需要が生じないためである。また、長期債の需要は相対的危険許容度 γ^{-1} で重み付けられた加重平均となっており、相対的危険許容度が小さくなるにつれて近視眼的需要は減少し保険需要は増大することを示しているが、これは直観と合致している。

留意点 3. *(3.8)* 式は、長期債の需要を構成する近視眼的需要の項と保険需要の項の何れも一定で金利に依存しないことを示している。しかし、かかる結果は、金利低下局面では短期債から長期債へ、金利上昇局面では長期債から短期債へ移行する現実の投資行動を説明出来ない。

3.2 高次の近似解析解

近似常微分方程式 (2.11) の解について、Campbell and Viceira (2002) は 1 次関数の指数関数であるとした。本稿は、次式で表される 2 次関数の指数関数であることを示す。

$$H(r_t) = \exp\left(a_0 + a_1 r_t + \frac{1}{2}a_2 r_t^2\right) \tag{3.9}$$

上式を近似常微分方程式 (2.11) に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\gamma\sigma^2}{2(1-\gamma)}(a_2+a_1^2+2a_1a_2r+a_2^2r^2)+\left(\frac{\gamma\kappa}{1-\gamma}(\bar{r}-r)-\lambda\sigma\right)(a_1+a_2r)$$
$$+\frac{\lambda^2}{2\gamma}-\frac{\rho}{1-\gamma}+r+\frac{\gamma h_0}{1-\gamma}-\frac{\gamma h_1}{1-\gamma}\left(a_0+a_1r+\frac{1}{2}a_2r^2\right)=0 \quad (3.10)$$

上式より、次の (a_0,a_1,a_2) に関する連立方程式を得る。

$$\frac{\gamma\sigma^2}{2(1-\gamma)}a_2^2-\frac{\gamma(h_1+2\kappa)}{2(1-\gamma)}a_2=0 \quad (3.11)$$
$$\frac{\gamma\sigma^2}{1-\gamma}a_1a_2-\frac{\gamma\kappa}{1-\gamma}a_1+\left(\frac{\gamma\kappa\bar{r}}{1-\gamma}-\lambda\sigma\right)a_2+1-\frac{\gamma h_1}{1-\gamma}a_1=0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\gamma\sigma^2}{2(1-\gamma)}a_2+\left(\frac{\gamma\kappa\bar{r}}{1-\gamma}+\frac{\gamma\sigma^2}{2(1-\gamma)}a_1^2-\lambda\sigma\right)a_1$$
$$+\frac{\lambda^2}{2\gamma}-\frac{\rho}{1-\gamma}+\frac{\gamma h_0}{1-\gamma}-\frac{\lambda h_1}{1-\gamma}a_0=0 \quad (3.13)$$

(3.11) 式より $a_2=0$、或いは

$$a_2=\frac{h_1+2\kappa}{\sigma^2} \quad (3.14)$$

以下では、$a_2=0$ に対応する解を「低次の解」、(3.14) 式に対応する解を「高次の解」と呼ぶ。低次の解が Campbell and Viceira (2002) の近似解析解 (a_0',a_1') と一致することは直ちに確認出来る。すなわち、彼等は高次の解を見落とし低次の解のみを示したのである。

以下では、高次の解を導出する。(3.14) 式を (3.12) 式に代入し a_1 について整理すると次式を得る。

$$\frac{\gamma\kappa}{1-\gamma}a_1+\left(\frac{\gamma\kappa\bar{r}}{1-\gamma}-\lambda\sigma\right)\frac{h_1+2\kappa}{\sigma^2}+1=0$$

これを解いて、a_1 が次のように求まる。

$$a_1=-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\lambda(h_1+2\kappa)-\sigma}{\kappa\sigma}-\frac{h_1+2\kappa}{\sigma^2}\bar{r} \quad (3.15)$$

a_0 は上式を (3.13) 式に代入して得られる。最後に、(h_0,h_1) については、h_1 を次の方程式の数値解法で求めた後、解を $h_0=h_1(1-\log h_1)$ に代入して求められる。

$$\begin{aligned} h_1 &= \exp\left(-a_0-a_1\lim_{t\to\infty}E[r_t]-\frac{1}{2}a_2\lim_{t\to\infty}E[r_t^2]\right) \\ &= \exp\left(-a_0-a_1\bar{r}-\frac{1}{2}a_2\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}+\bar{r}^2\right)\right) \end{aligned}$$

以上より、高次の解に対応する近似値関数、近似最適消費、近似最適長期債投資比率が次のように求められる。

$$V(W_t, r_t) = \exp\left[\gamma\left\{a_0 + a_1 r_t + \frac{1}{2}\frac{h_1 + 2\kappa}{\sigma^2} r_t^2\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{3.16}$$

$$c_t^* = \exp\left(-a_0 - a_1 r_t - \frac{1}{2}\frac{h_1 + 2\kappa}{\sigma^2} r_t^2\right) W_t \tag{3.17}$$

$$\varphi_t^* = \frac{1}{\gamma}\frac{\lambda}{b(T-t)\sigma} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\lambda(h_1 + 2\kappa) - \sigma}{b(T-t)\kappa\sigma} + \frac{h_1 + 2\kappa}{\sigma^2}(\bar{r} - r_t) \tag{3.18}$$

留意点 4. 常微分方程式が非斉次であるため、*Campbell and Viceira (2002)* が導出した低次の近似解析解と本稿で導出した高次の近似解析解は重ね合わせることが出来ない。それでは、何れが値関数を最大化する真の解の近似解であるのだろうか。これはパラメータに依存する複雑な評価となるため、実証分析によるパラメータ推定の結果を待つ必要がある。

留意点 5. 高次の近似解析解では、*(3.18)* 式において $h_1, \kappa > 0$ より、最適投資比率が金利低下局面では短期債から長期債へ、金利上昇局面では長期債から短期債へ移行する現実の投資行動を説明しており、*Campbell and Viceira (2002)* の導出した近似解析解よりも経済学的に有意義な解であることを示唆している。

4 結論と今後の課題

Campbell and Viceira (2002) は相対的危険回避度一定の期待効用関数と金利のバシチェック・モデルを仮定し、消費と債券投資の多期間最適化問題において近似解析解を導出したが、同解における長期債の近似最適投資比率は金利低下局面では短期債から長期債へ、金利上昇局面では長期債から短期債へ移行する現実の投資行動を説明出来なかった。本稿では、彼等が導出した近似常微分方程式に高次の近似解析解が存在することを示した。同解における長期債の近似最適投資比率は上記投資行動を説明している。但し、何れが値関数を最大化する真の解の近似解であるかは実証分析の結果を待つ必要がある。

本稿では、経済現象が賽振りのような生起する事象は未知であるが、任意の事象が生起する確率は既知であると仮定している。しかし、経済現象は Knight が指摘した通り、事象が生起する確率さえ未知である。Knight は前者の賽振りのような事象を「リスク」、後者のような生起確率さえ未知の事象を「真の不確実性」と呼んだ。近年、真の不確実性を織り込みながら解析的に取り扱い易い効用関数が提案されている。また、CAPM で示されている最適ポートフォリオである市場ポートフォリオは全ての資本資産を含んでおり、債券のみならず、株式、REIT 等を対象資産として含む最適ポートフォリオ問題を解くことが望まれる。筆者は真の不確実性を織り込んだ効用関数の下、短期

債、長期債、株式を投資対象とする多期間最適化問題の適切な近似解析解を導出することを企図している。

参考文献

[1] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2001): Appendix to *Strategic Asset Allocation*, on http://kuznets.fas.harvard.edu/ campbell/papers.html.

[2] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2002): *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, NY.

[3] Polyanin, A. D. and V/ F. Zaitsev (1995): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton, FL.

[4] Kogan, L. and R. Uppal (2001) "Risk Aversion and Optimal Portfolio Policies in Partial and General Equilibrium Economics," Working Paper 8609, National Bureau of Economic Research.

[5] Vasicek, O. (1977) "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 5, 177-88.