「無限期間」動学的最適化問題について

加　藤　竜　太

I　はじめに

本稿の目的は，いわゆるマクロ経済学等で仮定される「無限期間」の仮定から生じるバイアスを示すことである。近年のマクロ経済学では，各経済主体の合理的行動が前提となっており[1)]，なかでも各消費者，あるいは家計の行動は，動的最適化問題で記述されるのが通常である。すなわち，各家計は自分が与えられた時間を通して，自分自身の効用が最大になるように，最適消費経路を選択すると仮定しているのである。この所謂ミクロ経済学的基礎に立脚したマクロ経済学の方向は今後益々当然のこととなるであろう。しかし一方で，この動的最適化問題での各消費者の行動の記述においては，通常，その数学的扱いの容易さから，かなり単純な仮定のもとで分析されているのも事実である。かなり単純化された効用関数の仮定，さらにこの効用関数も特定化されたものが利用されていることも否定できない。この単純化の仮定の中でも本稿で分析対象とするのは，所謂「無限期間」の仮定である。すなわち，数学的扱いの容易さから，各消費者，あるいは家計は無限期間のなかで，最適消費経路を選択するという仮定である。別な言い方をすれば，各消費者は決して死亡することなく，無限に生存すると仮定しているのである[2)]。しかしこの仮定は明らかに非現実的

1) 近年の一般的大学院レベルのマクロ経済学の教科書は各経済主体の合理的行動の結果としてマクロ経済学をとらえている。例えば，Blanchard, O J and S Fischer (1989) 等を参照されたい。

2) 確かに Blanchard (1985) などでは正の死亡確率を期待効用に付与する事によって，寿命の不確実性を導入している。しかしこれは高齢になるに従って効用関数に付与するウエイトが無限小に近づくことであって，その動的最大化問題での対象期間はあくまで無限である。

であり，数学的扱いの容易さから，このような仮定が果たして認められるのであろうか。

このような主張に対して，以下のような反論が予想出来よう。たとえば，我々が与えられている時間は有限ではあるが，その有限期間内では意思決定が無意識なりにも絶え間なく行われていると考え，その対象期間が無限小に分割されているとすれば，各消費者の効用最大化行動においてその対象期間を無限に仮定することは何ら矛盾はないというものである。つまり，時間自身は有限だが，その無限小に分割された時間の総和は，ある種の無限時間として捕らえられると，考えるのである。さらに，次のような別な考え方もあろう。すなわち，我々各消費者が与えられた時間は有限であるが，無限時間の仮定において得られた結論が，もしある種の有限期間の仮定において得られるであろうものの極限，別な言い方をすれば，有限期間の仮定において得られる結論の近似値として，この無限期間の仮定から得られる結論が表現できるのであれば，数学的取り扱いの容易さから，無限期間の仮定は容認されるというものである。しかしながら，もしこの「無限期間」の仮定によって，その理論的結論が大きく影響されることがあれば，これは話が異なってくるのである。70年代には新古典派経済成長論が導く結論は，もし，ある種の不確実性が存在する場合には，無視できないバイアスがあることが示された[3)]。つまり，新古典派成長理論が示す長期的成長経路は，人口成長に不確実性が存在する場合，ある方向に偏っているのである。定常状態での成長経路の分布を見てみると，それは新古典派経済理論が導き出す経路は平均的経路ではないのである。つまり，不確実性を明示的に導入するならば，確実なもとで得られた結論は平均的に見ても，ある種のバイアスを含んでいるのである。本稿はこのような問題意識のもとで，寿命の不確実性を明示的に考察の対象にし，この寿命の不確実性の導入がどのように今まで与えられた結論に影響するかということを考察する。

3）この事については，Malliaris, A G and W A Brock (1982) に概説されている。なお，詳しくは Brock W A and L Mirman (1972, 1973), Mirman, L and I Zilcha (1975, 1976, 1977) を参照されたい。

続く第2節は基本的なモデルを示し，第3節はそのモデルを利用して，本稿の主題について考察する。第4節は簡単な結びに当てられる。

II　モデル

本稿の目的は，いわゆるマクロ経済学等で仮定される「無限期間」の仮定から生じるバイアスを示すことである。すなわち，無限に生き続けるという仮定を吟味することである。従って，本稿では素直に，我々は有限にしか生きることができないと仮定しよう。さらに，この有限性はかなり不確実である。必ずいつかは死亡するということは分かっているものの，それがいつ実現するかと言う点は全く不確実である。そこで本稿では，各消費者の状態を表すパラメータが不確実に変化していると仮定しよう。さらにこのパラメータは寿命が経つに連れて不確実ながら低下していることを表すことができることが望ましい。例えば，我々の健康状態は，年齢が経つに連れて次第に悪化していき，ある時点に来た時に取り返しの着かない状態に陥っていると考えるのである。この取り返しの着かない状態こそ，我々の死亡である。我々の健康状態は趨勢的には年齢とともに確実に低下するものの，各時点での健康状態はある種の不確実性を伴っているから，各消費者の状態を表すパラメータが不確実に変化しているとの仮定は極めて現実的である。さらに，このパラメータがある種の健康状態を表していると考えれば，このパラメータの値が高いほどその本人の満足は高まると仮定することは自然であろう。健康状態は高ければ高いほど望ましいのである。このような仮定は，この消費者の状態を表すパラメータを H で表せば，t 期でのこの消費者の健康状態 H_t は

$$dH_t = \mu(g)\,dt + \sigma dW_t \tag{1a}$$

$$H_0 = \overline{H} > 0 \tag{1b}$$

で表せるとしよう。ここで，W_t は確率変数で，その各期の増分($\Delta W_t = W_{t+1} - W_t$)は独立に平均0，分散 t に従うウイナー過程に従うものと仮定する。(1a)式の右辺第1項は平均的トレンドを表すもので確実的な項，一方，右辺第2項は，

不確実な部分で，$\sigma(>0)$はヴォラティィリティ（分散の平方根）と呼ばれ，この値が大きければそれだけ不確実性が高まると考えるのである。健康状態を表すHの増分は，平均的にはμの変化率で変化するが，同時に$\sigma(>0)$の値で不確実に変動するのである。さらに平均的変化を表すトレンドμはマイナスであるとしよう。平均的には健康状態は年齢とともに低下すると考えられるので，その変化率であるトレンドはマイナスであることが自然である。(1b)は初期でのHの仮定で，初期値は外生的に与えられていると仮定する。[4)]

マクロ経済学では政府の政策の効果を主に分析するが，ここでも政府の政策を含めよう。政府の政策をgであらわし，これは平均的トレンドに影響を与えると仮定しよう。たとえば，政府の公的医療保険制度などは，各人の平均的健康状態に影響を与えるであろう。一般にはより多くの公的医療保険制度への政府支出は各人の健康状態にとってプラスに働くであろう。そこで，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\mu(g)}{dg}=\mu'>0,\\
&\frac{d^2\mu(g)}{dg^2}=\mu''<0, \qquad (2)\\
&\mu<0,
\end{aligned}
$$

を仮定しよう。ここで，Hの不確実性の度合いを表す($\sigma(>0)$に対しては，政府の行動は何ら影響を与えないと仮定されている点に注されたい。本来制御が出来ない不確実な部分には，政府は全く影響を与えることが出来ないと仮定している。(1a),(2)は，日々の健康状態は不確実で，それは年齢の上昇に伴って，トレンド的には低下するとの定式化である。

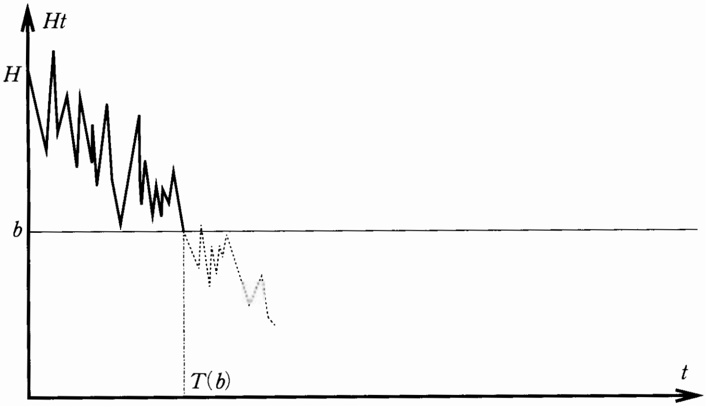
一方，寿命は確実に有限であるという事実を定式化しよう。我々の健康状態は(1a)に従って低下していくが，それがある下限に到達した時を我々の死亡と

4）厳密には

$P\{\omega\in\Omega : H_0(\omega)=\overline{H}\}=1,$

である。ここでP, $\mathscr{F}$はそれぞれ確率空間$(\Omega,\mathscr{F},P)$に対して定義された確率測度，$\sigma-$集合体である。詳しくは，加藤(1997b)を参照されたい。

図1



仮定しよう。図1に示されているように，下限 b に H_t が初めて到達した時を死亡状態と仮定し，その時点を $T(b)$ としよう[5)]。この $T(b)$ は確率変数で，その分布は，H の分布，b によって与えられる。

次に消費者の効用関数を定義しよう。ここでは一般に仮定されているように，各消費者の効用水準は消費水準に影響を受けると仮定しよう。すなわち，効用を u で表し，

$$\frac{du(c_t)}{dc_t} > 0,\qquad \frac{d^2u(c_t)}{dc_t^2} < 0, \tag{3}$$

と仮定しよう。さらに各消費者は(3)で与えられた効用を死亡までの期間にわたって通時的に期待値の意味で最大化すると仮定しよう。すなわち，

$$G = E_{\overline{H}}\left[\int_0^{T(b)} \exp[-\rho t]\, u(c_t)\, dt\right], \tag{4}$$

5)（1a)は確率1で下限 b に到達することが示せる。すなわち，
$P\{T(b) < +\infty\} = 1$
である。詳しくは，加藤(1997b)を参照されたい。また，$T(b)$ は Stopping Time になる。

を最大化するように消費経路$\{c_t : 0 \leq t \leq T(b)\}$を選択すると仮定しよう。ここで$E_{\overline{H}}$，$\rho(o<\rho<a)$はそれぞれ$H_0=\overline{H}$が与えられたもとでの条件付き期待オペレータ，時間選好率である。この場合，(1a),(1b)の他に通常の

$$ds_t = (y(H_t) + rs_t - c_t)\,dt, \tag{5a}$$

$$s_0 = \overline{s}, \tag{5b}$$

を制約として最適経路を選択すると仮定しよう。ただしここで，s_t, c_t はそれぞれ t 期での貯蓄，消費水準であり，r，y はそれぞれ利子率，所得水準である。(5a)式に示してあるように，所得水準は各消費者の健康状態に依存すると仮定するのが妥当だろう。健康状態をも含んだという広い意味で人的資本をとらえれば，この仮定はさほど問題はなかろう。より高い健康状態は相対的に高い人的資本の保有と考え，

$$\frac{dy(H_t)}{dH_t} = y' > 0$$

を仮定しよう。ここで注意を要する点は，(5a)式において H_t は t 期においては既知である点である。ブラウン運動過程は，定義上，その増分 $\Delta W_t (= W_{t+1} - W_t)$ は未知であるが，H_t は t 期において既知である[6]。したがって，(1a)式には不確実性は存在するが，(5a)には存在しない点を強調しておこう[7]。

ところで，ここで通常の無限期間における動的最適化行動を定義しよう。無限期間の場合は，(1a),(1b),(5a),(5b)を制約として，

$$F = E_{\overline{H}}\left[\int_0^{\infty} \exp[-\rho t]\, u(c_t)\, dt\right] \tag{4'}$$

を最大にするように消費経路$\{c_t : 0 \leq t = +\infty\}$が選択される。具体的には，(1a),(1b),(5a),(5b)を制約として，

6) すなわち，H_t は $\mathscr{F}_t$－ 可測である。

7) 後で示されるように，最適経路上における消費水準の変化 dc_t^* は，不確実な部分を含んだブラウン運動過程に従う。

$$V_F(\bar{s},\overline{H}) = \max_{\{c_t\}} E_{\overline{H}}\left[\int_0^\infty \exp[-\rho t]\, u(c_t)\, dt\right], \tag{4)''$$

の解として，$\{c_t^* : 0 \leq t = +\infty\}$が与えられる。(4)″をテイラー展開し，伊藤の変換公式を使い，さらに条件付き期待値を取ると，

$$0 = \max_{\{c_t\}}\left\{u(c_t) + V_{Fs}(y(H_t) + rs_t - c_t) + V_{FH}\mu(g) + \frac{1}{2}V''_{FH}\sigma^2 - \rho V_F\right\} \tag{6}$$

が得られる。ここで，$V_{Fi} = \dfrac{\partial V_F}{\partial i}, (i = s, H)$，$V''_{FH} = \dfrac{\partial^2 V_F}{\partial H^2}$ である。なお，消費水準に対する一階の条件は，

$$\frac{du(c_t)}{dc_t} = u'(c_t) = V_{Fs} \tag{7}$$

で与えられる。ところで，(6)式は偏微分方程式であるから一般には解くことは不可能である。しかしながら，ある種の特定化された効用関数の場合は，価値関数 $V_F(\bar{s},\overline{H})$の形状がどのようなものであるか知られている。経済学ではいくつかの効用関数に対して実際の価値関数 $V_F(\bar{s},\overline{H})$の形状が知られているが，ここでは(6)を明示的に解くために，絶対的危険回避度一定の効用関数，すなわち，

$$u(c_t) = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\exp[-\alpha c_t] \tag{8}$$

を仮定しよう。ここでαは正の値で一定であるとする。この場合，価値関数 $V_F(\bar{s},\overline{H})$の形状は

$$V_F(\bar{s},\overline{H}) = -\frac{\phi_1}{\phi_2}\exp[-\phi_2(y(\overline{H}) + r\bar{s})]$$

である事が知られており[8]，ϕ_1, ϕ_2を与えられたパラメータで求めることにより，

8) 例えば，Turnovsky, S J (1995) を参照されたい。

$$V_F(\bar{s},\overline{H})=-\frac{1}{\alpha r}\exp[f(\mu(g),\sigma,\overline{H},\bar{s})], \tag{9}$$

として求められる[9]。ここで以下のように $y(H_t)$ を特定化して議論を進めよう。先に述べたように広い意味で H_t をとらえれば，以下の定式化は w を賃金率として所得水準を表すと考えられよう。

$$y(H_t)=wH_t,$$
$$w>0$$

この特定化によって(9)はさらに単純化され，

$$\begin{aligned}&V_F(\bar{s},\overline{H})=-\frac{1}{\alpha r}\exp[f(\mu(g),\sigma,\overline{H},\bar{s})],\\&f(\mu(g),\sigma,\overline{H},\bar{s})=1-\frac{\alpha}{r}\left\{\mu(g)w-\frac{\alpha(\sigma w)^2}{2}\right\}-\frac{\rho}{r}-\alpha\{w\overline{H}+r\bar{s}\}\end{aligned} \tag{9$'$}$$

と表すことが出来る。さらに，$\{c_t^*:0\leq t=+\infty\}$ を最適消費経路として，

$$dc_t^*=\{w\mu(g)-rK\}dt+w\sigma dW_t \tag{10}$$

が与えられる。ただし，

$$K=-\frac{1}{\alpha r}\left\{r-\alpha\left\{\mu(g)w-\frac{\alpha(\sigma w)^2}{2}\right\}-\rho\right\}$$

である。

次に同じようにして(4)に対応する価値関数 $V_G(\bar{s},\overline{H})$ を以下の通り定義しよう。すなわち，(1a),(1b),(5a),(5b)を制約として，

$$V_G(\bar{s},\overline{H})=\max_{\{c_t\}}E_{\overline{H}}\left[\int_0^{T(b)}\exp[-\rho t]u(c_t)dt\right], \tag{11}$$

9）詳しくは，加藤(1997a)を参照されたい。なお，上記問題に対する横断性条件も満たされることを示すことが出来る。

で(4)に対応する価値関数 $V_G(\bar{s},\overline{H})$ を定義する。ところで(11)式は

$$
\begin{aligned}
V_G(\bar{s},\overline{H}) &= \max_{\{c_t\}} E_{\overline{H}}\left[\int_0^{T(b)} \exp[-\rho t]\, u(c_t)\, dt\right] \\
&= \max_{\{c_t\}} E_{\overline{H}}\left[\int_0^{\infty} \exp[-\rho t]\, u(c_t)\, dt - \int_{T(b)}^{\infty} \exp[-\rho t]\, u(c_t)\, dt\right] \qquad (12) \\
&= V_F(\bar{s},\overline{H}) - \max_{\{c_t\}} E_{\overline{H}}\left[\int_{T(b)}^{\infty} \exp[-\rho t]\, u(c_t)\, dt\right],
\end{aligned}
$$

と表すことが出来るから，$T(b)<+\infty$ という事実から，(12)式の右辺第2項が無限期間の仮定から生じうるバイアスに相当する。したがって，この右辺第2項の値が無視し得るものであるかによって，無限期間，あるいは有限期間の仮定の違いから生じる価値関数の違いが有り得るかということになる。

III　定式化バイアス

(12)に示されたように，右辺第2項が異なった定式化によるバイアスである。この右辺第2項を詳細に分析するために以下の準備をしよう。はじめに，H_t がはじめて b に到達した時点 $T(b)$ を起点として，次のような確率変数を定義しよう。[10] すなわち，

$$c_t^{**} \equiv c^*_{T(b)+t},\ \ t \geq 0 \qquad (13)$$

を定義し，さらに次の性質を持った，ボレル集合体が定義された実数上への可測関数 J，また，j を以下のように定義しよう。[11]

$$
\begin{aligned}
&E_{\overline{H}}\left[\,\left|\, J(c^*)\right|\,\right] < \infty, \\
&j(\overline{H}) \equiv E_{\overline{H}}[J(c^*)],\ \overline{H} \in R
\end{aligned}
$$
[12]

---

10) ブラウン運動過程の強マルコフ性が利用されている。

11) 以下の議論は，すべて $T(b)<+\infty$ が成立していることが条件である。断りのない限り，$T(b)<+\infty$ の記述を省略する。

12) はじめの条件は，絶対値の意味で可積であるという条件である。

このとき，強マルコフ性により，

$$E_{\overline{H}}[J(c^{**})\,|\,\mathscr{T}_T]=j(c_0^{**})\equiv j(c_T{}^{*}), \tag{14}$$

が得られる。

次にこの(13),(14)を使って，(12)式の右辺第2項を書き換えてみよう。まず，

$$\int_{T(b)}^{\infty}\exp[-\rho t]u(c_t{}^{*})\,dt=\exp[-\rho T]\int_0^{\infty}\exp[-\rho t]u(c_t{}^{**})\,dt,$$

に注意し，また，

$$J(c)\equiv\int_0^{\infty}\exp[-\rho t]u(c_t)\,dt \tag{15}$$

を定義して，

$$\begin{aligned}
&\max_{\{c_t\}}\ E_{\overline{H}}\left[\int_{T(b)}^{\infty}\exp[-\rho t]u(c_t)\,dt\right]\\
&=E_{\overline{H}}\left[\int_{T(b)}^{\infty}\exp[-\rho t]u(c_t{}^{*})\,dt\right]=E_{\overline{H}}\left[\exp[-\rho T]\int_0^{\infty}\exp[-\rho t]u(c_t{}^{**})\,dt\right]\\
&=\int_{\{T<\infty\}}\left[\exp[-\rho T]\int_0^{\infty}\exp[-\rho t]u(c_t{}^{**})\,dt\right]dP_{\overline{H}}\\
&=\int_{\{T<\infty\}}E_{\overline{H}}\left[\exp[-\rho T]\int_0^{\infty}\exp[-\rho t]u(c_t{}^{**})\,dt\,\Big|\,\mathscr{T}_T\right]dP_{\overline{H}}\\
&=\int_{\{T<\infty\}}\exp[-\rho T]E_{\overline{H}}\left[\int_0^{\infty}\exp[-\rho t]u(c_t{}^{**})\,dt\,\Big|\,\mathscr{T}_T\right]dP_{\overline{H}}\\
&=\int_{\{T<\infty\}}\exp[-\rho T]E_{\overline{H}}[J(c^{**})\,|\,\mathscr{T}_T]\,dP_{\overline{H}}\\
&=\int_{\{T<\infty\}}\exp[-\rho T]j(c_T{}^{*})\,dP_{\overline{H}}
\end{aligned} \tag{16}$$

が得られる。(16)は(9)′,(14),(15)をつかってさらに，

$$\int_{\{T<\infty\}} \exp[-\rho T]\, j(c_T{}^*)\, dP_{\overline{H}}$$
$$= D\int_{\{T<\infty\}} \exp[-(\rho+rK)\,T]\, dP_{\overline{H}}, \tag{17}$$
$$-\infty < D < +\infty$$

と簡単化できる。ただしここで D は一定値である。ところで，$\int_{\{T<\infty\}} \exp[-(\rho+rK)\,T]\, dP_{\overline{H}}$ は $E_{\overline{H}}[\exp[-(\rho+rK)\,T(b)]]$ であるが，これをさらに詳しく見てみよう。$E_{\overline{H}}[\exp[-(\rho+rK)\,T(b)]]$ を求めるため，任意の実数 $\beta\in R$ に対して，

$$V(t) \equiv \exp[\beta H_t - q(\beta)\,t],$$
$$q(\beta) \equiv \mu(g)\,\beta - \frac{\sigma^2\beta^2}{2},$$

を定義しよう[13]。ただし，$q(\beta)\geq 0$ を仮定する。このとき，マルチンゲール停止定理より，

$$E_{\overline{H}}[V(T(b))] = E_{\overline{H}}[V(0)] = \exp[\beta\overline{H}],$$

となり，さらに，

$$\begin{aligned}\exp[\beta\overline{H}] &= E_{\overline{H}}[V(T(b))] = E_{\overline{H}}[\exp[\beta b - q(\beta)\,T(b)]]\\ &= \exp[\beta b]\,E_{\overline{H}}[\exp[-q(\beta)\,T(b)]]\\ &= \exp[\beta b]\,\phi_*(\overline{H}\,|\,q(\beta)),\end{aligned}$$

となる。ただしここで，

$$\phi_*(\overline{H}\,|\,\rho+rK) \equiv E_{\overline{H}}[\exp[-(\rho+rK)\,T(b)]:\ H_T = b]$$

である。ここで，$T(b)$ に関してラプラス変換を行い，さらに $q(\beta) = r + rK$ とおくことによって，

13）測度変換に使われるものである。

$$E_{\overline{H}}[\exp[-(\rho+rK)T(b)]]=\phi_*(\overline{H}\,|\,\rho+rK)=\exp[\varsigma_*(\rho+rK)(b-\overline{H})] \quad (18)$$

が求められる。ただし，

$$\varsigma_*(\rho+rK)=\frac{1}{\sigma^2}\left(\{\mu^2(g)+2\sigma^2(\rho+rK)\}^{\frac{1}{2}}+\mu(g)\right)>0$$

である。したがって，(18)を使って(17)は

$$\int_{\{T<\infty\}}\exp[-\rho T]j(c_t^*)\,dP_{\overline{H}}$$

$$=D\int_{\{T<\infty\}}\exp[-(\rho+rK)T(b)]\,dP_{\overline{H}}=DE_{\overline{H}}[\exp[-(\rho+rK)T(b)]] \quad (19)$$

$$=D\exp[\varsigma_*(b-\overline{H})]$$

と書き表すことが出来る。(12)は最終的には，

$$V_G(\bar{s},\overline{H})=V_F(\bar{s},\overline{H})-D\exp[\varsigma_*(b-\overline{H})] \quad (20)$$

となる。(20)に示されているように，$-\infty<D<+\infty$ を満たす D に対して，$b\to-\infty$ のとき，$V_G(\bar{s},\overline{H})\to V_F(\bar{s},\overline{H})$ である。しかし一方で，必ず $-\infty<D<+\infty$ であるので，$b\to-\infty$ なる以外の時は，任意の b に対して(20)式第2項は0には収束しない。別な言い方をすれば，寿命が無限に続かない限り，$V_G(\bar{s},\overline{H})=V_F(\bar{s},\overline{H})$ とはならない。特に政策的変化を分析する場合，その政策の効果は $V_F(\bar{s},\overline{H})$ のみならず，D,ς_* を通して $V_G(\bar{s},\overline{H})$ に影響を与える。従って，政策間の効用比較を行う場合には，この第2項を通しての影響を無視できない。例えば，2つの政策 g_1，g_2 において

$$\left|\frac{\partial V_F(g_1,g_2,\bar{s},\overline{H})}{\partial g_1}\right|>\left|\frac{\partial V_F(g_1,g_2,\bar{s},\overline{H})}{\partial g_2}\right|$$

であるとしても，

$$\left|\frac{\partial(D\exp[\varsigma_*(b-\overline{H})])}{\partial g_1}\right|<\left|\frac{\partial(D\exp[\varsigma_*(b-\overline{H})])}{\partial g_2}\right|$$

ということは十分に考えられ，この場合，政策評価が全く逆転してしまうことも十分考えられよう。

IV 結論

本稿では，いわゆるマクロ経済学等で仮定される「無限期間」の仮定と「有限期間」の仮定とから生じる違いを間接効用関数の視点から分析を行った。各消費者の寿命は本来不確実であり，また，その終了は確実である。しかしながらなマクロ経済学における通時的効用最大化問題では寿命の不確実性は一般にはあまり取り入れられていない。特にその仮定の違いから生じ得る違いについては議論がなされていなかった[14]。本稿ではこの点を議論の対象とし，その違いから生じる所謂バイアスを示した。中でも政策的な影響を見る場合，このバイアスの部分を通して，政策の評価が異なり得る点が示された。従って，この仮定の違いを十分に認識して，一般的な無限期間最適化問題を援用することが望ましいであろう。

参考文献

Blanchard, O J (1985), "Debt, Deficits, and Finite Horizons," *JPE* **93**, 223-247

Blanchard, O J and S Fischer (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press

Brock, W A and L Mirman (1972), "Optimal Economic Growth and Uncertainty : The Discounted Case," *JET* **4**, 479-513

——————————(1973), "Optimal Economic Growth and Uncertainty : The No Discounting Case," *IER* **14**, 560-573

Grimmett, G R and D R Stirzaker (1992), *Probability and Random Processes 2nd Edition*, Clarendon Press, Oxford

Harrison, J M (1985), *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, Wiley

Kato, R (1997a), "Human Capital Uncertainty and the Optimal Government Spending on Medical Care," mimeo, *Shiga University*, Japan

———(1997b), "Time Horizon and the Specification Bias,", mimeo, *Shiga University*, Japan

Malliaris, A G and W A Brock (1982), *Stochastic Methods in Economics, and Finance*, North-Holland

---

14) この例外として，Merton, R C (1992) がある。

Merton, R C (1992), *Continuous-Time Finance*, Blackwell
Mirman, L and I Zilcha (1975), "On Optimal Growth under Uncertainty," *JET* **11**, 329-339
——————(1976), "Unbounded Shadow Prices for Optimal Sotchastic Growth Models," *IER* **17**, 121-132
——————(1977), "Characterizing Optimal Policies in a One-Sector Model of Economic Gorowth under Uncertainty," *JET* **14**, 389-401
Ross, S (1996), *Stochastic Processes 2nd Edition*, John Wiley
Turnovsky, S J (1995), *Methods of Macroeconomic Dynamics*, MIT Press
Williams, D (1991), *Probability with Martingales*, Cambridge Univ Press