

## 不定値計量の幾何学

佐野 圭太\*・大久保克己

## Indefinite Metric Geometry

Keita SANO and Katsumi OKUBO

Abstract. Pythagoras' theorem, cosine theorem and sine theorem are well known, and are taught in the high school. In this paper, we consider the vector space and define the inner product. The length and the angle with complex value are defined by virtue of the hyperbolic sine and the hyperbolic cosine. Then we get the formulas similar to cosine theorem and sine theorem.

## 1. は じ め に

ユークリッド平面 $R^2$ を考え、単位円 $x^2+y^2=1$ 上に二点  $P=(\cos \theta, \sin \theta)$  と  $Q=(\cos \varphi, \sin \varphi)$  ( $0 < \theta < \varphi < 2\pi$ )をとる。そして $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の内積を計算すると、

$$(1.1) \quad (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = \cos(\varphi - \theta) \text{ となり、}$$

$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の間の角は $\varphi - \theta$ であることがわかる。このとき、線分 $OP$ 、 $OQ$ と弧 $\widehat{PQ}$ とで囲まれた部分の面積は $\frac{1}{2}(\varphi - \theta)$ となる。このようなことは高等学校において学習する。

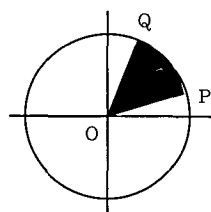
そこで $R^2$ 上の二つのベクトル $\vec{u}=(x_1, y_1)$ と $\vec{v}=(x_2, y_2)$ の『内積』を

$$(1.2) \quad [\vec{u}, \vec{v}] = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

と定義して上と同様のことを考えてみた。このときベクトル $\vec{u}=(x_1, y_1)$ の長さ $\hat{d}(\vec{u})$ は次のように定義する。(但し、 $i=\sqrt{-1}$ ) (注：この長さは三角不等式を満たさない)

$$(1.3) \quad \hat{d}(\vec{u}) = \begin{cases} \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})} = \sqrt{x_1^2 - y_1^2} & x_1^2 - y_1^2 > 0 \\ -i\sqrt{-(\vec{u}, \vec{u})} = -i\sqrt{-(x_1^2 - y_1^2)} & x_1^2 - y_1^2 < 0 \end{cases}$$

fig1.1円のとき



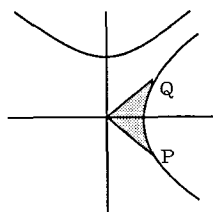
今、曲線  $x^2 - y^2 = 1$  ( $x > 0$ ) 上に二点  $P = (\cosh \theta, \sinh \theta)$  と  $Q = (\cosh \varphi, \sinh \varphi)$  ( $\theta < \varphi$ ) をとります。上に定義した『内積』を計算すると、

$$(1.4) \quad [\vec{OP} \text{ と } \vec{OQ}] = \cosh \theta \cosh \varphi - \sinh \theta \sinh \varphi \\ = \cosh (\varphi - \theta)$$

となり、 $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  の間の角は  $\varphi - \theta$  であることがわかる。さらに線分  $OP, OQ$  と曲線  $PQ$  で囲まれた部分の面積は、

$$(1.5) \quad \int_{\theta}^{\varphi} \cosh t (-\sinh t)' dt - \frac{-i}{2} \cosh \varphi \sinh \varphi + \frac{-i}{2} \cosh \theta \sinh \theta \\ = -i \int_{\theta}^{\varphi} \cosh^2 t dt + \frac{i}{4} \sinh 2\varphi - \frac{i}{4} \sinh 2\theta \\ = -i \int_{\theta}^{\varphi} \frac{\cosh 2t + 1}{2} dt + \frac{i}{4} \sinh 2\varphi - \frac{i}{4} \sinh 2\theta \\ = -\frac{i}{2} (\varphi - \theta)$$

fig1.2



となる。面積に  $-i$  がつくが、四点  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(0,1)$  からなる単位正方形  $OABC$  の面積が  $-i$  なので不自然でないのである。これらのことから、角が  $\varphi - \theta$  となるのもわかる。次章以降でこの角をさらに拡張していこうと思う。

## 2. 二次元平面

二次元平面  $R^2$  に改めて『内積』と長さを定義する。

**Definition 2.1.** (内積). 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  と  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  の『内積』を下のように定義する。

$$(2.1) \quad [\vec{u}, \vec{v}] = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

また、 $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$  のとき、 $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  は『直角』ということにする。

**Proposition 2.1.** 『内積』 $[\vec{u}, \vec{v}]$  は次の座標変換に関して不変な量である。( $\theta$  は実数)

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Remark 2.1.** 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1) \neq (0,0)$  と  $\vec{v} = (x_2, y_2) \neq (0,0)$  とが『直角』のとき、 $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  とは  $x=y$  ( $x=-y$ ) に関して対称な直線上にある。

*proof.*  $x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0$  のとき、もし  $y_1 = 0$  ならば  $x_1 \neq 0$  より  $x_2 = 0$  となり上を満たしている。他方  $y_1 \neq 0$  ならば  $x_2 \neq 0$  であり ( $x_2 = 0$  なら矛盾)、 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_2}{x_2}$  が成り立つ。

**Theorem 2.1.** 内積の定義より二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  に対して次の式が成り立つ。

$$(2.3) \quad [\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}] - 2[\vec{u}, \vec{v}]$$

特に  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が『直角』のときは次の式が成り立つ。

$$(2.4) \quad [\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}]$$

**Definition 2.2.** (長さ). ベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  の長さを次のように定義する。(但し、 $i = \sqrt{-1}$ )

$$(2.5) \quad d(\vec{u}) = \begin{cases} \sqrt{[\vec{u}, \vec{u}]} = \sqrt{x_1^2 - y_1^2} & x_1^2 - y_1^2 \geq 0 \\ -i \sqrt{-[\vec{u}, \vec{u}]} = -i \sqrt{-(x_1^2 - y_1^2)} & x_1^2 - y_1^2 < 0 \end{cases}$$

角度を定義する前に $xy$ 平面を $l_1: x=y$ と $l_2: x=-y$ の二直線でもって、A,B,C,D の四つの領域に分けておく。

$$A: |x| > |y|, x > 0$$

$$B: |x| < |y|, y > 0$$

$$C: |x| > |y|, x < 0$$

$$D: |x| < |y|, y < 0$$

そして $\theta$ が実数のとき、次の式が成り立つことも確かめておく。

$$(2.6) \quad \begin{cases} \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} & \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \\ \sinh i\theta = i, \sin \theta & \cosh i\theta = \cos \theta \\ \sinh \left(\theta + \frac{\pi}{2}i\right) = i \cosh \theta & \cosh \left(\theta + \frac{\pi}{2}i\right) = i \sinh \theta \\ \sinh (\theta + \pi i) = -\sinh \theta & \cosh (\theta + \pi i) = -\cosh \theta \end{cases}$$

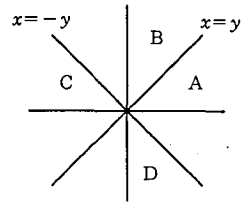


fig2.1

次に  $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})}$  の値について調べる。

**Lemma2.1.** 二つのベクトル $\vec{u}=(x_1, y_1)$ と $\vec{v}=(x_2, y_2)$ が同じ領域 A,B,C,D にあるとき

$$\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \geq 1$$

*proof.*  $\vec{u}, \vec{v} \in A$  (またはC) のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] > 0$ ,  $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) > 0$ である。このとき、

$$(2.7) \quad (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 - (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geq 0$$

となるので成り立つ。他方、 $\vec{u}, \vec{v} \in B$  (またはD) のときは、 $[\vec{u}, \vec{v}] < 0$ ,  $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) < 0$ であり、

(2.7) も成り立つので証明される。(等号は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の傾きが等しいとき成立)  $\square$

**Lemma2.2** 二つのベクトル $\vec{u}=(x_1, y_1)$ と $\vec{v}=(x_2, y_2)$  が隣り合う領域にあるときは

$$\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \text{ は純虚数となる。}$$

*proof.*  $[\vec{u}, \vec{v}]$  が実数で、 $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})$  が純虚数なので明らか。  $\square$

**Lemma2.3** 二つのベクトル $\vec{u}=(x_1, y_1)$ と $\vec{v}=(x_2, y_2)$ が原点について対称な領域にあるときは

$$\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \leq -1$$

*proof.*  $\vec{u} \in A, \vec{v} \in C$ のとき $[\vec{u}, \vec{v}] < 0$ で $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) > 0$ 、また $\vec{u} \in B, \vec{v} \in D$ のときは $[\vec{u}, \vec{v}] > 0$ で $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) < 0$ である。そして (2.7) が成り立つので証明される。(等号は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の傾きが等しいとき成立)  $\square$

**Definition2.3(角).** 二つのベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間の角 $\Theta$ を次のように定義する。 $(\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) \neq 0)$

$$(2.8) \quad \cosh \Theta = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})}$$

このときの $\Theta$ は $\theta$ を実数として

A1)  $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ領域にあれば $\Theta$ は実数

A2)  $\vec{u}$ と $\vec{v}$ 隣り合う領域にあれば  $\Theta = \theta + \frac{\pi}{2}i$

A3)  $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が原点について対称な領域にあれば  $\Theta = \theta + \pi i$

**Corollary2.1** 二つのベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が『直角』のとき  $\Theta = \frac{\pi}{2}i$ 。

**Remark2.2** 上に定義した角には加法性が成り立つ。

proof.  $\vec{OP}$ と $(1,0)$ の間の角を $\theta$ とすると

$$\vec{OP} = (d(\vec{OP}) \cosh \theta, d(\vec{OP}) \sinh \theta)$$

とかけ、 $\vec{OQ}$ も角 $\theta$ を使って

$$\vec{OQ} = (d(\vec{OQ}) \cosh \theta, d(\vec{OQ}) \sinh \theta)$$

と表せる。(fig2.2) このとき  $\vec{OP}$ と $\vec{OQ}$ の間の角 $\Psi$ は、

$$(2.9) \quad \cosh \Psi = \frac{[\vec{OP}, \vec{OQ}]}{d(\vec{OP}) d(\vec{OQ})}$$

$$= \cosh \theta \cosh \Phi - \sinh \theta \sinh \Phi = \cosh(\theta - \Phi)$$

となり加法性がわかる。

□

**Theorem2.2** 三角形の内角の和は $\pi i$ である。

proof.  $\triangle OPQ$  ( $d(\vec{OP}) \neq 0, d(\vec{OQ}) \neq 0, d(\vec{PQ}) \neq 0$ ) に対して  $OR \parallel PQ$  となるように  $OR$  を引くと (fig2.3)、 $\angle OQP = \angle QOR$ 。ゆえに三角形の内角の和は $\pi i$ になる。(注：角を $\cos \theta$ で考えると和は $\pi$ となる)

□

**Theorem2.3** (余弦定理). 二つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対して次の式が成り立つ。

$$(2.10) \quad d^2(\vec{u} - \vec{v}) = d^2(\vec{u}) + d^2(\vec{v}) - 2d(\vec{u})d(\vec{v}) \cosh \Theta$$

**Theorem2.4.** 二つのベクトル $\vec{OP}$ と $\vec{OQ}$ の間の角を $\theta$ とし、 $[\vec{OP}, \vec{PQ}] = 0$ とすると、次の式が成り立つ。(  $d(\vec{OP}) \neq 0, d(\vec{OQ}) \neq 0, d(\vec{PQ}) \neq 0$  )

$$(2.11) \quad d(\vec{OP}) = d(\vec{OQ}) \cosh \theta$$

$$(2.12) \quad d(\vec{PQ}) = \begin{cases} id(\vec{OQ}) \sinh \theta, & \vec{OP}, \vec{OQ} \in B(\text{または} D) \\ -id(\vec{OQ}) \sinh \theta, & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

proof 次の二式より (2.11) と  $d^2(\vec{PQ}) = -d^2(\vec{OQ})$ ,  $\sinh^2 \theta$  が導ける。

$$d^2(\vec{PQ}) = d^2(\vec{OP}) + d^2(\vec{OQ}) - 2d(\vec{OP})d(\vec{OQ}) \cosh \theta$$

$$d^2(\vec{OQ}) = d^2(\vec{PQ}) + d^2(\vec{OP})$$

さらに、fig2.4 から fig2.7 より式 (2.12) が導ける。

fig 2.4

$d(\vec{PQ})$  が虚数

$$d(\vec{PQ}) = -id(\vec{OQ}) \sinh \theta$$

fig 2.5

$d(\vec{PQ})$  が虚数

$$d(\vec{PQ}) = -id(\vec{OQ}) \sinh \theta$$

fig 2.6

$d(\vec{PQ})$  が実数

$$d(\vec{PQ}) = id(\vec{OQ}) \sinh \theta$$

fig 2.7

$d(\vec{PQ})$  が実数

$$d(\vec{PQ}) = -id(\vec{OQ}) \sinh \theta$$

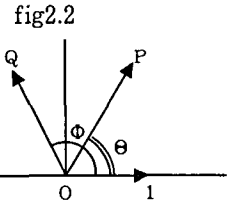
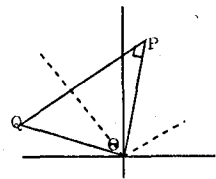
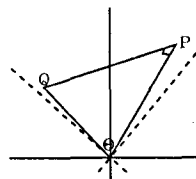
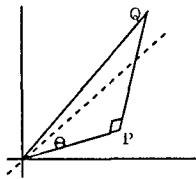
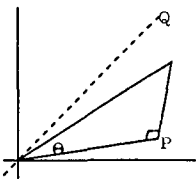
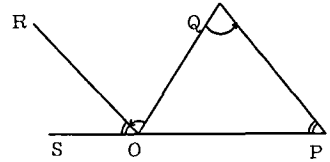


fig2.3

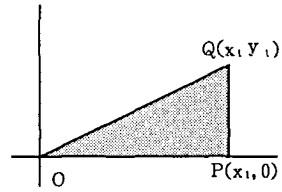


**Lemma2.4.**  $\triangle OPQ$ の面積は $-i \times$ (正の実数)という値を取る。

*proof.*  $O(0,0)$ ,  $P(x_1,0)$ ,  $Q(x_1,y_1)$  ( $x_1 > 0, y_1 > 0$ )からなる  $\triangle OPQ$ の面積は

$$(2.13) \quad \int_0^{x_1} -i \frac{y_1}{x_1} x dx = -i \frac{x_1 y_1}{2}$$

fig2.8



となり、一般の $\triangle OPQ$ の面積はこの三角形の和と差で求まる。□

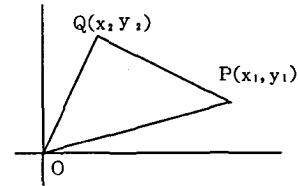
(注:  $O(0,0)$ ,  $P(1,0)$ ,  $Q(1,1)$  のとき、 $d(\overrightarrow{OQ})=0$ だが面積は 0 ではない)

**Lemma2.5.**  $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が『直角』のとき $\triangle OPQ$ の面積は $\frac{1}{2} d(\overrightarrow{OP}) d(\overrightarrow{OQ})$ になる。

*proof.*  $P(x_1, y_1)$ が領域 A に、 $Q(x_2, y_2)$ が領域 B にあるとしても一般性を失わない (x軸、y軸について対称に変換すればよい)。面積 S は、

$$(2.14) \quad S = -i \frac{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)}{2} - i \frac{x_2 y_2}{2} + i \frac{x_1 y_1}{2} \\ = -i \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}$$

fig2.9



と計算できる。これを变形すると、

$$4S^2 = (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) - (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2$$

ここで  $x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0$ を使うと証明できる。□

このことから、三角形の面積が次のように定義できる。

**Definition2.4(面積).** ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の間の角が $\Theta$  のとき、 $\triangle OPQ$ の面積を次のように定義する。  
( $d(\overrightarrow{OP}) \neq 0, d(\overrightarrow{OQ}) \neq 0, d(\overrightarrow{PQ}) \neq 0$ )

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{i}{2} d(\overrightarrow{OP}) d(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta, & \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \in B(\text{または} D) \\ -\frac{i}{2} d(\overrightarrow{OP}) d(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta, & \text{上以外のとき} \end{cases}$$

**Theorem2.5(正弦定理).**  $\triangle PQR$  ( $d(\overrightarrow{PQ}) \neq 0, d(\overrightarrow{QR}) \neq 0, d(\overrightarrow{RP}) \neq 0$ )において次の式が成り立つ。(但し、 $\angle P + \angle Q + \angle R = \pi i$ ,  $S$  は $\triangle PQR$ の面積)

$$(2.16) \quad \frac{\sinh P}{d(\overrightarrow{QR})} = \frac{\sinh Q}{d(\overrightarrow{PR})} = \frac{\sinh R}{d(\overrightarrow{PQ})} = \frac{2iS}{d(\overrightarrow{PQ}) d(\overrightarrow{QR}) d(\overrightarrow{RP})}$$

**証明**  $\triangle PQR$ を四つの場合に場合わけして考える。(  $\theta, \varphi, \psi$  を正の実数とする)

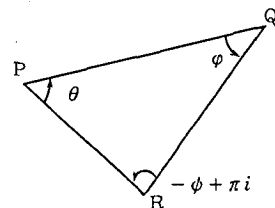
- a1. 三辺とも長さが実数のとき
- a2. 二辺の長さが実数で、一辺が純虚数のとき
- a3. 一辺の長さが実数で、二辺が純虚数のとき
- a4. 三辺とも長さが純虚数のとき

a1のとき、 $\angle P = \theta, \angle Q = \varphi, \angle R = -\varphi + \pi i$ と仮定する。

このとき、

$$(2.17) \quad \begin{aligned} 2S &= -i d(\overrightarrow{PQ}) d(\overrightarrow{PR}) \sinh \theta \\ &= -i d(\overrightarrow{PQ}) d(\overrightarrow{QR}) \sinh \varphi \\ &= -i d(\overrightarrow{PR}) d(\overrightarrow{QR}) \sinh(-\varphi + \pi i) \end{aligned}$$

fig2.10



が成り立ち、各辺を $d(\overrightarrow{PQ}) d(\overrightarrow{QR}) d(\overrightarrow{PR})$ で割ると式 (2.16) が得られる。

$\alpha 2$ のとき、 $\hat{d}(\overrightarrow{PQ})$ ,  $\hat{d}(\overrightarrow{PR})$ が実数とする。そして、 $\angle P = \theta$ ,  $\angle Q = \varphi + \frac{\pi i}{2}$ ,  $\angle R = -\varphi + \frac{\pi i}{2}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
 (2.18) \quad 2S &= -i\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \sinh \theta \\
 &= -i\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh \left(\varphi + \frac{\pi i}{2}\right) \\
 &= -i\hat{d}(\overrightarrow{PR}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh \left(-\varphi + \frac{\pi i}{2}\right)
 \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})$  で割ると式 (2.16) が得られる。

$\alpha 3$ のとき、 $\hat{d}(\overrightarrow{QR})$ だけが実数とする。 $\angle P = -\theta$ ,  $\angle Q = -\varphi + \frac{\pi i}{2}$ ,  $\angle R = \varphi + \frac{\pi i}{2}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad 2S &= i\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{PR}) (-\sinh(-\theta)) \\
 &= -i\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh \left(-\varphi + \frac{\pi i}{2}\right) \\
 &= -i\hat{d}(\overrightarrow{PR}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh \left(\varphi + \frac{\pi i}{2}\right)
 \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})$  で割ると式 (2.16) が得られる。

$\alpha 4$ のとき、 $\angle P = -\theta$ ,  $\angle Q = \varphi + \pi i$ ,  $\angle R = -\varphi$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad 2S &= i\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{PR}) (-\sinh(-\theta)) \\
 &= i\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) (-\sinh(\varphi + \pi i)) \\
 &= i\hat{d}(\overrightarrow{PR}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) (-\sinh(-\varphi))
 \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})$  で割ると式 (2.16) が得られる。  $\square$

fig2.11

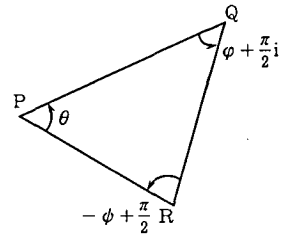


fig2.12

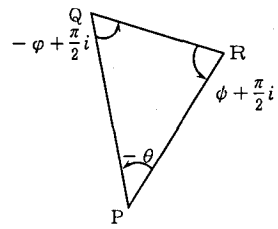
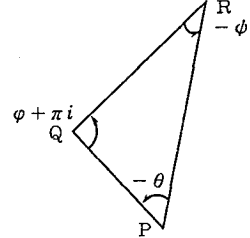


fig2.13



**Theorem 2.6.** 三点  $L, M, N$  が一直線上になく、 $\hat{d}(\overrightarrow{LM}) \hat{d}(\overrightarrow{MN}) \hat{d}(\overrightarrow{LN}) \neq 0$  のとき、中心  $(p, q)$  がとれて  $L, M, N$  を通る双曲線

(2.21)  $(x-p)^2 - (y-q)^2 = R^2$  が存在する。( $R$  を双曲線の半径ということにする) このとき

$\triangle LMN$  の面積を  $S$  とおくと、

$$(2.22) \quad 4R^2 = \frac{\hat{d}^2(\overrightarrow{LM}) \hat{d}^2(\overrightarrow{MN}) \hat{d}^2(\overrightarrow{LN})}{4S^2}$$

が成り立つ。

*proof.* 三点を  $O(0,0)$ ,  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  としても一般性は失われない。この三点を式 (2.21) に代入すると連立方程式が得られ、 $p, q, R$  が求まる。

$$(2.23) \quad p = \frac{x_1^2 y_2 - y_1^2 y_2 - x_2^2 y_1 + y_2^2 y_1}{2(x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

$$(2.24) \quad q = \frac{x_1^2 x_2 - y_1^2 x_2 - x_1^2 x_1 + y_1^2 x_1}{2(x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

$$(2.25) \quad R^2 = \frac{(x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2)((x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2)}{-4(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}$$

$\triangle OPQ$  の面積  $S$  は定義より

$$\begin{aligned}
 (2.26) \quad 4S^2 &= -\hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) \sinh^2 \Theta \\
 &= -\hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) (\cosh^2 \Theta - 1) \\
 &= -([\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}]^2 - \hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) \\
 &= -(x_1y_2 - x_2y_1)^2
 \end{aligned}$$

となり、(2.22) が示せる。 □

$R^2$  の符号は次のようになる。

$\alpha 1$  のとき、 $R^2 < 0$

$\alpha 2$  のとき、 $R^2 > 0$

$\alpha 3$  のとき、 $R^2 < 0$

$\alpha 4$  のとき、 $R^2 > 0$

これを使うと (2.16) は次のようになる。

**Theorem 2.7 (正弦定理)**  $\triangle PQR$  ( $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \neq 0$ ,  $\hat{d}(\overrightarrow{QR}) \neq 0$ ,  $\hat{d}(\overrightarrow{RP}) \neq 0$ ) において次の式が成り立つ。(但し、 $\angle P + \angle Q + \angle R = \pi i$ ,  $R$  は双曲線の半径)

$$(2.27) \quad \frac{\sinh^2 P}{\hat{d}^2(\overrightarrow{QR})} = \frac{\sinh^2 Q}{\hat{d}^2(\overrightarrow{PR})} = \frac{\sinh^2 R}{\hat{d}^2(\overrightarrow{PQ})} = \frac{-1}{4R^2}$$

### 3. 三次元空間

三次元空間  $R^3$  に『内積』と『外積』と長さを定義する。

**Definition 3.1 (内積).** 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  と  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  の『内積』を下のように定義する。

$$(3.1) \quad [\vec{u}, \vec{v}] = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$$

また、 $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$  のとき、 $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  は『直角』ということにする。

**Proposition 3.1.** 『内積』 $[\vec{u}, \vec{v}]$  は次の座標変換に関して不変な量である。(  $\theta$  は実数 )

$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(3.4) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**Lemma 3.1.** 内積の定義より二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  にたいして次の式が成り立つ。

$$(3.5) \quad [\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}] - 2[\vec{u}, \vec{v}]$$

特に  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が『直角』のときは次の式が成り立つ。

$$(3.6) \quad [\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}]$$

**Definition 3.2 (外積).** 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  と  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  の『外積』を下のように定義する。

$$(3.7) \quad \vec{u} * \vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, -(x_1y_2 - y_1x_2))$$

**Proposition3.2.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  の『外積』  $\vec{u} * \vec{v}$  は  $\vec{u}$  にも  $\vec{v}$  にも『直角』である。

**Definition3.3** (長さ) ベクトル  $\vec{u}=(x_1, y_1, z_1)$  の長さを次のように定義する。(但し、 $i=\sqrt{-1}$ )

$$(3.8) \quad \hat{d}(\vec{u}) = \begin{cases} \sqrt{[\vec{u}, \vec{u}]} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2} & x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 \geq 0 \\ -i\sqrt{-(\vec{u}, \vec{u})} = -i\sqrt{-(x_1^2 + y_1^2 - z_1^2)} & x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 < 0 \end{cases}$$

**Lemma3.2.**  $\vec{u}=(x_1, y_1, z_1)$  と  $\vec{v}=(x_2, y_2, z_2)$  にたいして次の式が成り立つ。

$$(3.9) \quad \hat{d}^2(\vec{u} * \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}]^2 - \hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v})$$

*proof.*  $\hat{d}^2(\vec{u}) = x_1^2 + y_1^2 - z_1^2$ ,  $\hat{d}^2(\vec{v}) = x_2^2 + y_2^2 - z_2^2$  であるから、

$$\begin{aligned} \hat{d}^2(\vec{u} * \vec{v}) &= (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 - (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \\ &= y_1^2(-x_2^2 + z_2^2) + z_1^2(y_2^2 - x_2^2) + x_1^2(z_2^2 - y_2^2) \\ &\quad - 2y_1 y_2 z_1 z_2 - 2z_1 z_2 x_1 x_2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 \\ &= y_1^2(y_2^2 - \hat{d}^2(\vec{v})) + z_1^2(z_2^2 + \hat{d}^2(\vec{v})) + x_1^2(x_2^2 - \hat{d}^2(\vec{v})) \\ &\quad - 2y_1 y_2 z_1 z_2 - 2z_1 z_2 x_1 x_2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 \\ &= [\vec{u}, \vec{v}]^2 - \hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) \end{aligned}$$

□

**Lemma3.3**  $\hat{d}^2(\vec{u}) = -1$ ,  $\hat{d}^2(\vec{v}) = -1$  で  $z_1 z_2 \geq 1$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] \leq -1$  となる。

*proof.*

$$\begin{aligned} &(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 - (z_1 z_2 - 1)^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (z_1 z_2 - 1)^2 \\ &= (z_1^2 - 1)(z_2^2 - 1) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (z_1 z_2 - 1)^2 \\ &= -(z_1 - z_2)^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

となり、 $z_1 z_2 \geq 1$  の仮定より  $-(z_1 z_2 - 1) \leq x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq z_1 z_2 - 1$ 。ゆえに  $[\vec{u}, \vec{v}] = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2 \leq -1$  が成り立つ。(iff  $\vec{u} = \vec{v}$  のとき等号成立)

**Lemma3.4**  $\hat{d}^2(\vec{u}) = -1$ ,  $\hat{d}^2(\vec{v}) = -1$  で  $z_1 z_2 \leq -1$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] \geq 1$  となる。

*proof.*

$$\begin{aligned} &(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 - (z_1 z_2 + 1)^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (z_1 z_2 + 1)^2 \\ &= (z_1^2 - 1)(z_2^2 - 1) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (z_1 z_2 + 1)^2 \\ &= -(z_1 - z_2)^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

となり、 $z_1 z_2 \leq -1$  の仮定より  $z_1 z_2 + 1 \leq x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq -(z_1 z_2 + 1)$ 。ゆえに  $[\vec{u}, \vec{v}] = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2 \geq 1$  が成り立つ。(iff  $\vec{u} = -\vec{v}$  のとき等号成立)

□

角度を定義する前に三次元空間  $R^3$  を、円錐  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  で、A, B, C の三つの領域に分けておく。

$$A: x^2 + y^2 - z^2 < 0, \quad z > 0$$

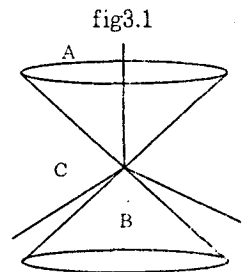
$$B: x^2 + y^2 - z^2 < 0, \quad z < 0$$

$$C: x^2 + y^2 - z^2 > 0$$

二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の位置関係は次の六つの場合が考えられる。

B1)  $\vec{u} \in A, \vec{v} \in A$  または  $\vec{u} \in B, \vec{v} \in B$

B2)  $\vec{u} \in A, \vec{v} \in B$





B3)  $\vec{u} \in C, \vec{v} \in A(B)$

B4)  $\vec{u} \in C, \vec{v} \in C, \hat{d}^2(\vec{u} * \vec{v}) \leq 0$

B5)  $\vec{u} \in C, \vec{v} \in C, \hat{d}^2(\vec{u} * \vec{v}) > 0$  で  $[\vec{u}, \vec{v}] > 0$

B6)  $\vec{u} \in C, \vec{v} \in C, \hat{d}^2(\vec{u} * \vec{v}) > 0$  で  $[\vec{u}, \vec{v}] < 0$

**Definition 3.4 (角).**  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角  $\Theta$  を次のように定義する。( $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) \neq 0$ )

$$(3.10) \quad \cosh \Theta = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})}$$

このときの  $\Theta$  の値は B1 から B6 の場合によって次のようになる。(  $\theta$  は実数)

B1) のとき、Lemma 3.3 より  $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \geq 1$  となるので、 $\Theta = \theta$  (実数)。

B2) のとき、Lemma 3.4 より  $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \leq -1$  となるので、 $\Theta = \theta + \pi i$ 。

B3) のときは、 $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})$  が純虚数、よって  $\Theta = \theta + \frac{\pi i}{2}$ 。

B4) のとき、場合分けの仕方より  $-1 \leq \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \leq 1$  となり  $\Theta = \theta i$ 。

B5) のとき、場合分けの仕方より  $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \geq 1$  となり  $\Theta = \theta$ 。

B6) のとき、場合分けの仕方より  $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \leq -1$  となり  $\Theta = \theta + \pi i$ 。

**Theorem 3.1 (余弦定理).** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  に対して次の式が成り立つ。

$$(3.11) \quad \hat{d}^2(\vec{u} - \vec{v}) = \hat{d}^2(\vec{u}) + \hat{d}^2(\vec{v}) - 2\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) \cosh \Theta$$

**Remark 3.1.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  で張られる平面  $\pi$  は、 $z$  軸を中心に回転することによって、下のいずれかの平面と一致する。(  $\theta$  は実数)

$$\pi_1: -\sinh \omega x + \cosh \omega z = 0$$

$$\pi_2: \cosh \omega x - \sinh \omega z = 0$$

$$\pi_3: x + z = 0$$

(注: 平面  $\pi$  のユークリッド的な法線ベクトルと、 $z$  軸の作る角が  $0$  から  $\frac{\pi}{2}$  のとき  $\pi_1$ 、 $\frac{\pi}{2}$  から  $\pi$  のとき  $\pi_2$ 、ちょうど  $\frac{\pi}{2}$  のとき  $\pi_3$ 。言いかえると、平面  $\pi$  が円錐  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  に、原点だけで交わると  $\pi_1$ 、二本の直線で交わると  $\pi_2$ 、母線で接すると  $\pi_3$ )

fig3.2  $\pi_1$

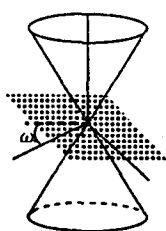


fig3.3  $\pi_2$

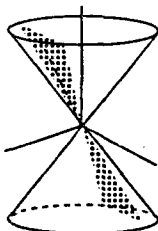
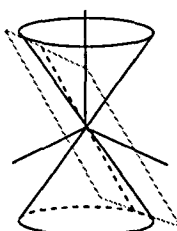


fig3.4  $\pi_3$



平面  $\pi_1$  (fig 3.2) には、 $\vec{e}=(0,1,0)$  と  $\vec{f}=(\cosh\omega,0,\sinh\omega)$  がとれ、

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \hat{d}^2(\vec{e}) &= \hat{d}^2(\vec{f})=1, [\vec{e}, \vec{f}]=0 \\ \vec{e} * \vec{f} &= (\sinh\omega, 0, \cosh\omega), \hat{d}^2(\vec{e} * \vec{f}) = -1 (<0) \end{aligned}$$

となる。 $\pi_1$  上の任意のベクトル  $\vec{u}$  は実数  $a, b$  を適当に取れば  $\vec{u}=a\vec{e}+b\vec{f}$  と表せる。さらに、 $\pi_1$  上の二つのベクトル  $\vec{u}=a\vec{e}+b\vec{f}$  と  $\vec{v}=c\vec{e}+d\vec{f}$  に対しては、

$$(3.13) \quad [\vec{u}, \vec{v}] = bd \cosh^2 \omega + ac - bd \sinh^2 \omega = ac + bd$$

$$(3.14) \quad \hat{d}^2(\vec{u}) = a^2 + b^2$$

が成り立っている。

平面  $\pi_2$  (fig 3.3) には、 $\vec{e}=(0,1,0)$  と  $\vec{g}=(\sinh\omega,0,\cosh\omega)$  がとれ、

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \hat{d}^2(\vec{e}) &= 1, \hat{d}^2(\vec{g}) = -1, [\vec{e}, \vec{g}] = 0 \\ \vec{e} * \vec{g} &= (\cosh\omega, 0, \sinh\omega), \hat{d}^2(\vec{e} * \vec{g}) = 1 (>0) \end{aligned}$$

となる。 $\pi_2$  上の任意のベクトル  $\vec{u}$  は実数  $a, b$  を適当に取れば  $\vec{u}=a\vec{e}+b\vec{g}$  と表せる。さらに、二つのベクトル  $\vec{u}=a\vec{e}+b\vec{g}$  と  $\vec{v}=c\vec{e}+d\vec{g}$  にたいしては、

$$(3.16) \quad \begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}] &= bdsinh^2\omega + ac - bdcosh^2\omega = ac - bd \\ \hat{d}^2(\vec{u}) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

が成り立っている。

平面  $\pi_3$  (fig 3.4) には、 $\vec{e}=(0,1,0)$  と  $\vec{h}=(-1,0,1)$  がとれ、

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \hat{d}^2(\vec{e}) &= 1, \hat{d}^2(\vec{h}) = 0, [\vec{e}, \vec{h}] = 0 \\ \vec{e} * \vec{h} &= (1, 0, -1), \hat{d}^2(\vec{e} * \vec{h}) = 0 \end{aligned}$$

となる。 $\pi_3$  上の任意のベクトル  $\vec{u}$  は実数  $a, b$  を適当に取れば  $\vec{u}=a\vec{e}+b\vec{h}$  と表せる。さらに、二つのベクトル  $\vec{u}=a\vec{e}+b\vec{h}$  と  $\vec{v}=c\vec{e}+d\vec{h}$  にたいしては、

$$(3.19) \quad [\vec{u}, \vec{v}] = ac \quad \hat{d}^2(\vec{u}) = a^2$$

が成り立っている。

そこで、 $\pi_1$  のような平面を『ユークリッド的平面』、 $\pi_2$  のような平面を『双曲的平面』、 $\pi_3$  のような平面を『退化した平面』と呼ぶことにします。

**Lemma3.5.** 『退化した平面』内で長さが 0 でない二つのベクトルがつくる角は、0 または  $\pi i$  になる。

*proof.* (3.18) の  $\vec{e}, \vec{h}$  を使うと  $\vec{OP}=a\vec{e}+b\vec{h}$ ,  $\vec{OQ}=c\vec{e}+d\vec{h}$  と表せる。このときの角  $\Theta$  は

$$\cosh \Theta = \frac{ac}{\sqrt{a^2} \sqrt{c^2}} = \pm 1$$

の計算から 0 または  $\pi i$  になる。

**Lemma3.6.** 『ユークリッド的平面』上の二つのベクトル  $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  が『直角』のとき、その間の角はユークリッド空間の意味で直角になっている。

*proof.* (3.12) を満たす  $\vec{e}, \vec{f}$  を使うと、 $\vec{OP}=\hat{d}(\vec{OP}) \cos \phi \vec{e} + \hat{d}(\vec{OP}) \sin \phi \vec{f}$ ,  $\vec{OQ}=\hat{d}(\vec{OQ}) \cos \phi \vec{e} + \hat{d}(\vec{OQ}) \sin \phi \vec{f}$  と書ける。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = \hat{d}(\vec{OP}) \hat{d}(\vec{OQ}) (\cos \phi \cos \phi + \sin \phi \sin \phi) = \cos(\phi - \phi) = 0$$

となるので、 $\phi - \phi = \pm \frac{\pi}{2}$ 。

**Lemma3.7.** 『双曲的平面』上の二つのベクトル  $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  が『直角』のとき、この平面と円錐  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  の交線に関して、 $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  は対称な位置にある。

*proof.* 式(3.15) を満たす  $\vec{e}, \vec{g}$  を使うと  $\vec{OP}=x_1\vec{e}+y_1\vec{g}$ ,  $\vec{OQ}=x_2\vec{e}+y_2\vec{g}$  と表せる。 $[\vec{OP},$

$\vec{OQ}] = x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0$  ならば  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_2}{x_2}$  となり、 $\vec{e} + \vec{g}$  について対称となる。 $(y_1 = 0$  のときは、 $x_1 \neq 0$  より  $y_2 = 0, x_2 \neq 0$  となり成り立っている)

□

**Corollary3.1.** 二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が『直角』のとき  $\Theta = \frac{\pi}{2}i$ 。

このことは角の定義より『ユークリッド的平面』でも『双曲的平面』でも成り立つ。しかし、『退化した平面』内には『直角』はない。

**Remark3.2.** (3.10) で定義した角には加法性が成り立つ。

*proof.*  $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  が『ユークリッド的平面』 $\pi_1$  上にあるとき、平面を  $z$  軸を中心に回転して *fig3.2* の位置にもっていきける。 $\vec{OP}$  と  $\vec{e} = (0, 1, 0)$  の間の角を  $\Theta$  とすると (*fig 3.5*)、 $\sinh \Theta = \sinh i \theta = i \sin \theta$  なので、

$$\vec{OP} = d(\vec{OP}) \cosh \Theta \vec{e} - i d(\vec{OP}) \sinh \Theta \vec{f}$$

とかけ、 $\vec{OQ}$  も角  $\Phi = i \phi$  を使って、

$$\vec{OQ} = d(\vec{OQ}) \cosh \Phi \vec{e} - i d(\vec{OQ}) \sinh \Phi \vec{f}$$

と表せる。 $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  の間の角  $\Psi$  は、

$$\cosh \Psi = \frac{[\vec{OP}, \vec{OQ}]}{d(\vec{OP}) d(\vec{OQ})} = \cosh \Theta \cosh \Phi - \sinh \Theta \sinh \Phi = \cosh (\Theta - \Phi)$$

となり加法性が成立する。

$\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  が『双曲的平面』 $\pi_2$  上にあるとき、このときも平面を  $z$  軸を中心に回転して *fig3.3* のようにできる。 $\vec{OP}$  と  $\vec{e} = (0, 1, 0)$  の間の角を  $\Theta$ 、 $\vec{OQ}$  と  $\vec{e} = (0, 1, 0)$  の間の角を  $\Phi$  とすると (*fig 3.5*)、

$$\vec{OP} = d(\vec{OP}) \cosh \Theta \vec{e} + d(\vec{OP}) \sinh \Theta \vec{g}$$

$$\vec{OQ} = d(\vec{OQ}) \cosh \Phi \vec{e} + d(\vec{OQ}) \sinh \Phi \vec{g}$$

と表せ、 $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  の間の角  $\Psi$  は、

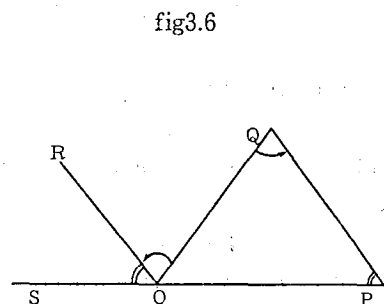
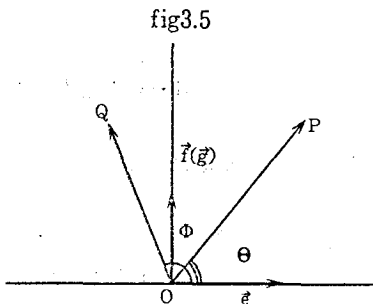
$$\cosh \Psi = \frac{[\vec{OP}, \vec{OQ}]}{d(\vec{OP}) d(\vec{OQ})} = \cosh \Theta \cosh \Phi - \sinh \Theta \sinh \Phi = \cosh (\Theta - \Phi)$$

より加法性が成立する。『退化した平面』上で成り立つのは自明。

□

**Theorem3.2.** 三角形の内角の和は  $\pi i$  となる。

*proof.*  $\triangle OPQ$  ( $d(\vec{OP}) \neq 0$ ,  $d(\vec{PQ}) \neq 0$ ,  $d(\vec{OQ}) \neq 0$ ) に対して  $OR \parallel PQ$  となるように  $OR$  を引くと、 $\angle OQP = \angle QOR$  (*fig 3.6*)。ゆえに三角形の内角の和は  $\pi i$  である。(注：角を  $\cos \Theta$  で考えると和は  $\pi$ 。この定理は『ユークリッド的平面』でも『双曲的平面』でも成り立つ) □



**Theorem3.3.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  の間の角を  $\Theta$  とし、 $[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{PQ}] = 0$  としたとき、次の式が成り立つ。 $(\hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \neq 0)$

$$(3.20) \quad \hat{d}(\overrightarrow{OP}) = \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \cosh \Theta$$

$$(3.21a) \quad \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) = i \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta \quad (\text{B1)のとき})$$

$$(3.21b) \quad \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) = -i \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta \quad (\text{B3), B4), B5)のとき})$$

*proof.* 次の二式より (3.20) と  $\hat{d}^2(\overrightarrow{PQ}) = -\hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) \sinh^2 \Theta$  が導ける。

$$(3.22) \quad \hat{d}^2(\overrightarrow{PQ}) = \hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) + \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) - 2 \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \cosh \Theta$$

$$(3.33) \quad \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) = \hat{d}^2(\overrightarrow{PQ}) + \hat{d}^2(\overrightarrow{OP})$$

B1) のとき、 $\hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  が  $-i \times$  (正の実数)、 $\sinh \Theta$  は正の実数、 $\hat{d}(\overrightarrow{PQ})$  は正の実数。よって (3.21a) が成り立つ。

B2) のとき、 $\angle P$  が『直角』の『直角三角形』はできない。

B3) のとき  $\sinh \Theta$  は  $i \times$  (正の実数)、 $\hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  が正の実数のときは  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ})$  は  $-i \times$  正の実数、他方  $\hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  が  $-i \times$  (正の実数) のときは  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ})$  は正の実数。よって (3.21b) が成り立つ。

B4) のとき、 $\hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  が正の実数、 $\sinh \Theta$  は  $i \times$  (正の実数)、 $\hat{d}(\overrightarrow{PQ})$  は正の実数。よって (3.21b) が成り立つ。

B5) のとき、 $\hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  が正の実数、 $\sinh \Theta$  も正の実数、 $\hat{d}(\overrightarrow{PQ})$  は  $-i \times$  (正の実数)。よって (3.21b) が成り立つ。

B6) のとき、 $\angle P$  が『直角』の『直角三角形』はできない。 □

**Proposition3.3.**  $\triangle OPQ$  の面積は、 $OPQ$  が『ユークリッド的平面』上にあれば正の実数、 $OPQ$  が『双曲的平面』上にあれば  $-i \times$  (正の実数)、 $OPQ$  が『退化した平面』上にあれば 0 という値を取る。

*proof.* 『ユークリッド的平面』上にある  $O(0,0,0)$ ,  $P(0, x_1, 0)$ ,  $Q(y_1 \cosh \theta, x_1, y_1 \sinh \theta)$  ( $x_1 > 0, y_1 > 0$ ) からなる  $\triangle OPQ$  の面積を求めると ( $\overrightarrow{OQ} = x_1 \vec{e} + y_1 \vec{e}$ )、

$$(3.24) \quad \int_0^{x_1} \frac{\hat{d}(\overrightarrow{PQ})}{x_1} x dx = \frac{x_1 y_1}{2}$$

と実数になる。一般の  $\triangle OPQ$  の面積はこれの和と差で求まる。

『双曲的平面』上にある  $O(0,0,0)$ ,  $P(0, x_1, 0)$ ,  $Q(-y_1 \sinh \theta, x_1, y_1 \cosh \theta)$  ( $x_1 > 0, y_1 > 0$ ) からなる  $\triangle OPQ$  の面積を求めると ( $\overrightarrow{OQ} = x_1 \vec{e} + y_1 \vec{g}$ )、

$$(3.25) \quad \int_0^{x_1} \frac{\hat{d}(\overrightarrow{PQ})}{x_1} x dx = -i \frac{x_1 y_1}{2}$$

となる。一般の  $\triangle OPQ$  の面積はこれの和と差で求まる。

『退化した平面』上にある  $O(0,0,0)$ ,  $P(0, x_1, 0)$ ,  $Q(-y_1, x_1, y_1)$  ( $x_1 > 0, y_1 > 0$ ) からなる  $\triangle OPQ$  の面積を求めると ( $\overrightarrow{OQ} = x_1 \vec{e} + y_1 \vec{h}$ )、

$$(3.26) \quad \int_0^{x_1} \frac{\hat{d}(\overrightarrow{PQ})}{x_1} x dx = 0$$

となる。 □

(注:  $O(0,0,0)$ ,  $P(0,1,0)$ ,  $Q(1,1,1)$  のときは  $\hat{d}(\overrightarrow{OQ}) = 0$  となっているが、面積は 0 とならない)

**Proposition3.4.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  が『直角』のとき  $\triangle OPQ$  の面積は  $\frac{1}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  になる。

*proof.*  $O, P, Q$  が『ユークリッド的平面』にあるとき (3.12) で使った  $\vec{e}$  を  $x'$  軸、 $\vec{f}$  を  $y'$  軸と考えて、 $O(0,0)$ ,  $P(x'_1, y'_1)$ ,  $Q(x'_2, y'_2)$  とおく。 $(x'_2 < 0 < x'_1, y'_1 > 0, y'_2 > 0)$  面積  $S$  は、

$$(3.27) \quad 2S = (y'_1 + y'_2)(x'_1 - x'_2) + x'_2 y'_2 - x'_1 y'_1$$

$$= x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1$$

と計算できる。二乗して変形すると、

$$4S^2 = (x'_1 + y'_1)(x'_2 + y'_2) - (x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2)^2$$

となり、(内積)  $x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2 = 0$  を使うと証明できる。

O, P, Q が『双曲的平面』にあるとき (3.15) で使った  $\vec{e}$  を  $x'$  軸、 $\vec{g}$  を  $y'$  軸と考えて、 $O(0,0), P(x'_1, y'_1), Q(x'_2, y'_2)$  とおきます。

( $0 < x'_2 < x'_1, y'_1 > 0, y'_2 > 0$ ) 面積  $S$  は、

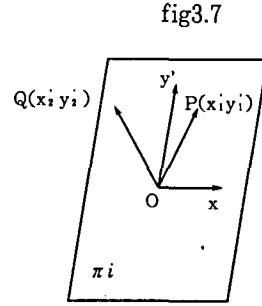
$$\begin{aligned} 2S &= -i(y'_1 + y'_2)(x'_1 - x'_2) - ix'_2 y'_2 - (-ix'_1 y'_1) \\ &= -i(x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1) \end{aligned}$$

と計算できます。二乗して変形すると、

$$4S^2 = -(x'_1 - y'_1)(x'_2 - y'_2) - (x'_1 x'_2 - y'_1 y'_2)^2$$

となり、(内積)  $x'_1 x'_2 - y'_1 y'_2 = 0$  を使うと証明できる。

このことと Theorem 3.3 から、三角形の面積が次のように定義できる。



**Definition 3.5 (面積).** 二つのベクトル  $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  の間の角が  $\Theta$  のとき、 $\triangle OPQ$  の面積が次のように定義できる。(  $\hat{d}(\vec{OP}) \neq 0, \hat{d}(\vec{OQ}) \neq 0, \hat{d}(\vec{PQ}) \neq 0$  )

$$(3.28) \quad \begin{cases} \frac{i}{2} \hat{d}(\vec{OP}) \hat{d}(\vec{OQ}) \sinh \Theta, & (B1), (B6) \text{ のとき} \\ -\frac{i}{2} \hat{d}(\vec{OP}) \hat{d}(\vec{OQ}) \sinh \Theta, & (B2), (B3), (B4), (B5) \text{ のとき} \end{cases}$$

**Theorem 3.4.** 二つのベクトル  $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  によって作られる平行四辺形の面積を  $2S$  とすると、

$$(3.29) \quad \hat{d}^2(\vec{OP} * \vec{OQ}) = -4S^2$$

*proof.* (3.9) と (3.28) を使うと、

$$\hat{d}^2(\vec{OP} * \vec{OQ}) = [\vec{OP}, \vec{OQ}]^2 - \hat{d}^2(\vec{OP}) \hat{d}^2(\vec{OQ}) = \hat{d}^2(\vec{OP}) \hat{d}^2(\vec{OQ}) (\cosh^2 \Theta - 1) = -4S^2 \text{ となり導ける。}$$

**Theorem 3.5 (正弦定理),**  $\triangle PQR$  ( $\hat{d}(\vec{OP}) \neq 0, \hat{d}(\vec{PQ}) \neq 0, \hat{d}(\vec{OQ}) \neq 0$ ) において次の式が成り立つ。(但し、 $\angle P + \angle Q + \angle R = \pi i, S$  は  $\triangle PQR$  の面積)

$$(3.30) \quad \frac{\sinh P}{\hat{d}(\vec{QR})} = \frac{\sinh Q}{\hat{d}(\vec{PR})} = \frac{\sinh R}{\hat{d}(\vec{PQ})} = \frac{2iS}{\hat{d}(\vec{PQ}) \hat{d}(\vec{QR}) \hat{d}(\vec{PR})}$$

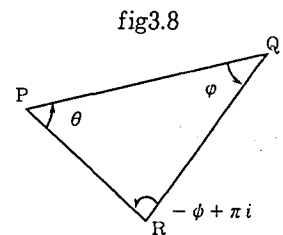
*proof.*  $\triangle PQR$  を六つの場合に場合わけして考える。(  $\theta, \phi, \psi$  を正の実数とする )

- $\beta 1$ . 三辺とも長さが実数で、 $\triangle PQR$  が『双曲的平面』にある
- $\beta 2$ . 二辺の長さが実数で、一辺が純虚数。 $\triangle PQR$  は『双曲的平面』にある
- $\beta 3$ . 一辺の長さが実数で、二辺が純虚数。 $\triangle PQR$  は『双曲的平面』にある
- $\beta 4$ . 三辺とも長さが純虚数、 $\triangle PQR$  は『双曲的平面』にある
- $\beta 5$ . 三辺とも長さが実数、 $\triangle PQR$  が『ユークリッド的平面』にある
- $\beta 6$ .  $\triangle PQR$  が『退化した平面』にある

$\beta 1$ . のとき、 $\angle P = \theta, \angle Q = \phi, \angle R = -\phi + \pi i$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} (3.31) \quad 2S &= -i \hat{d}(\vec{PQ}) \hat{d}(\vec{PR}) \sinh \theta \\ &= -i \hat{d}(\vec{PQ}) \hat{d}(\vec{QR}) \sinh \phi \\ &= -i \hat{d}(\vec{PR}) \hat{d}(\vec{QR}) \sinh(-\phi + \pi i) \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\vec{PQ}) \hat{d}(\vec{QR}) \hat{d}(\vec{PR})$  で割ると (3.30) が得られる。



$\beta 2.$  のとき、 $\hat{d}(\overrightarrow{PQ})$ ,  $\hat{d}(\overrightarrow{PR})$  が実数と仮定する。そして、 $\angle P = \theta$ ,  $\angle Q = \varphi + \frac{\pi i}{2}$ ,  $\angle R = -\varphi + \frac{\pi i}{2}$  と仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} (3.32) \quad 2S &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \sinh \theta \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh \left( \varphi + \frac{\pi i}{2} \right) \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh \left( -\varphi + \frac{\pi i}{2} \right) \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})$  で割ると (3.30) が得られる。

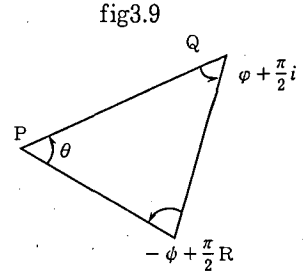


fig3.10

$\beta 3.$  のとき、 $\hat{d}(\overrightarrow{QR})$  だけが実数とする。  $\angle P = -\theta$ ,  $\angle Q = -\varphi + \frac{\pi i}{2}$ ,  $\angle R = \varphi + \frac{\pi i}{2}$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} (3.33) \quad 2S &= i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{PR}) (-\sinh(-\theta)) \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh \left( -\varphi + \frac{\pi i}{2} \right) \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh \left( \varphi + \frac{\pi i}{2} \right) \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})$  で割ると (3.30) が得られる。

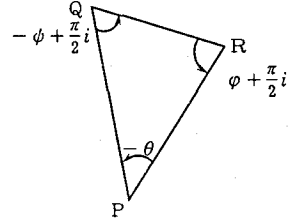
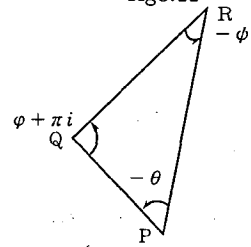


fig3.11

$\beta 4.$  のとき、 $\angle P = -\theta$ ,  $\angle Q = \varphi + \pi i$ ,  $\angle R = -\varphi$  と仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} (3.34) \quad 2S &= i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{PR}) (-\sinh(-\theta)) \\ &= i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) (-\sinh(\varphi + \pi i)) \\ &= i \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) (-\sinh(-\varphi)) \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})$  で割ると (3.30) が得られる。



$\beta 5.$  のとき、 $\angle P = \theta i$ ,  $\angle Q = \varphi i$ ,  $\angle R = \varphi i$  と仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} (3.35) \quad 2S &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \sinh(\theta i) \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh(\varphi i) \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh(\varphi i) \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})$  で割ると (3.30) が得られる。

$\beta 6.$  のとき、 $S=0$  で、 $P, Q, R$  の角は  $0$  または  $\pi i$  なので、(3.30) が成り立つ。

#### 4. 四次元空間 (1)

四次元空間  $R^4$  に『内積』と長さを定義します。

**Definition 4.1 (内積).** 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$  と  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2, t_2)$  の『内積』を下のように定義する。

$$(4.1) \quad [\vec{u}, \vec{v}] = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2$$

また、 $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$  のとき、 $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  は『直角』ということにする。

**Proposition 4.1.** 『内積』 $[\vec{u}, \vec{v}]$  は次の座標変換  $A$  に関して不変な量である。(  $\theta$  は実数 )

$$(4.2) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}$$

**Lemma 4.1.** 内積の定義より二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  にたいして次の式が成り立つ。

$$(4.3) \quad [\vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}] - 2[\vec{u}, \vec{v}]$$

特に  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が『直角』のときは次の式が成り立つ。

$$(4.4) \quad [\vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}]$$

**Definition 4.2** (長さ) ベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$  の長さを次のように定義する。(但し、 $i = \sqrt{-1}$ )

$$(4.5) \quad d(\vec{u}) = \begin{cases} \sqrt{[\vec{u}, \vec{u}]} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - t_1^2} & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - t_1^2 \geq 0 \\ -i\sqrt{-[\vec{u}, \vec{u}]} = -i\sqrt{-(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - t_1^2)} & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - t_1^2 < 0 \end{cases}$$

**Definition 4.3.** 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$  と  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2, t_2)$  に対して、 $T^2$  という量を定義する。 $(T^2$  が平行四辺形の面積の二乗になることは *Proposition 4.2* で示される)

$$(4.6) \quad \begin{aligned} T^2 &= d^2(\vec{u}) d^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - t_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - t_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2)^2 \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 \\ &\quad - (x_1 t_2 - x_2 t_1)^2 - (y_1 t_2 - y_2 t_1)^2 - (z_1 t_2 - z_2 t_1)^2 \end{aligned}$$

**Proposition 4.2** (長さ). 四次元空間の基本直交ベクトルを  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$  とし、

$$d^2(\vec{e}_1) = d^2(\vec{e}_2) = d^2(\vec{e}_3) = -d^2(\vec{e}_4) = 1, \quad [\vec{e}_i, \vec{e}_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4 \text{ } i \neq j)$$

が成り立っているとす。このとき  $\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3 + t_1 \vec{e}_4$  と  $\vec{v} = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3 + t_2 \vec{e}_4$  の作る 2-ベクトル  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  の大きさを調べると、

$$(4.7) \quad |\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} [\vec{u}, \vec{u}] & [\vec{u}, \vec{v}] \\ [\vec{v}, \vec{u}] & [\vec{v}, \vec{v}] \end{vmatrix} = d^2(\vec{u}) d^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2 = T^2$$

となり  $T^2$  になっている。

次に四次元空間  $R^4$  を、円錐  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$  で、A, B, C の三つの領域に分けておく。

$$A: x^2 + y^2 + z^2 - t^2 < 0, \quad t > 0$$

$$B: x^2 + y^2 + z^2 - t^2 < 0, \quad t < 0$$

$$C: x^2 + y^2 + z^2 - t^2 > 0$$

二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の位置関係は次の六つの場合が考えられる。

$$C1) \quad \vec{u} \in A, \vec{v} \in A \text{ または } \vec{u} \in B, \vec{v} \in B$$

$$C2) \quad \vec{u} \in A, \vec{v} \in B$$

$$C3) \quad \vec{u} \in C, \vec{v} \in A(B)$$

$$C4) \quad \vec{u} \in C, \vec{v} \in C, T^2 \geq 0,$$

$$C5) \quad \vec{u} \in C, \vec{v} \in C, T^2 < 0, [\vec{u}, \vec{v}] > 0,$$

$$C6) \quad \vec{u} \in C, \vec{v} \in C, T^2 < 0, [\vec{u}, \vec{v}] < 0,$$

**Lemma4.2.** 二つのベクトル  $\vec{u}=(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ,  $\vec{v}=(x_2, y_2, z_2, t_2)$  が  $\hat{d}^2(\vec{u}) < 0$ ,  $\hat{d}^2(\vec{v}) < 0$  で  $t_1 t_2 \geq 0$  のとき (C1)、 $T^2 \leq 0$  となる。

*proof.* 式  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \hat{d}^2(\vec{u}) + t_1^2$ , と  $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \hat{d}^2(\vec{v}) + t_2^2$  より、

$$\begin{aligned} & (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 - (t_1 t_2 + \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= (\hat{d}^2(\vec{u}) + t_1^2)(\hat{d}^2(\vec{v}) + t_2^2) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 \\ &\quad - (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 - (t_1 t_2 + \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= (t_1 \hat{d}(\vec{v}) - t_2 \hat{d}(\vec{u}))^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

となる。  $|t_1| \geq |\hat{d}(\vec{u})|$ ,  $|t_2| \geq |\hat{d}(\vec{v})|$ ,  $t_1 t_2 \geq 0$  の仮定より

$$(4.8) \quad -(t_1 t_2 + \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})) \leq x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \leq t_1 t_2 + \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})$$

ゆえに  $[\vec{u}, \vec{v}] = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2 \leq \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) < 0$  が成り立ち、 $T^2 \leq 0$ 。(iff  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が平行のとき等号成立)  $\square$

**Lemma4.3.** 二つのベクトル  $\vec{u}=(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ,  $\vec{v}=(x_2, y_2, z_2, t_2)$  が  $\hat{d}^2(\vec{u}) < 0$ ,  $\hat{d}^2(\vec{v}) < 0$  で  $t_1 t_2 \leq 0$  のとき (C2)、 $T^2 \leq 0$  となる。

*proof.* 式  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \hat{d}^2(\vec{u}) + t_1^2$ , と  $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \hat{d}^2(\vec{v}) + t_2^2$  より、

$$\begin{aligned} & (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 - (t_1 t_2 - \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= (\hat{d}^2(\vec{u}) + t_1^2)(\hat{d}^2(\vec{v}) + t_2^2) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 \\ &\quad - (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 - (t_1 t_2 - \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= (t_1 \hat{d}(\vec{v}) + t_2 \hat{d}(\vec{u}))^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

となる。  $|t_1| \geq |\hat{d}(\vec{u})|$ ,  $|t_2| \geq |\hat{d}(\vec{v})|$ ,  $t_1 t_2 \leq 0$  の仮定より

$$(4.9) \quad t_1 t_2 - \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) \leq x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \leq -(t_1 t_2 - \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}))$$

ゆえに  $[\vec{u}, \vec{v}] = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2 \geq -\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) > 0$  が成り立ち、 $T^2 \leq 0$ 。(iff  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が平行のとき等号成立)

**Lemma4.4.** 二つのベクトル  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  が C3) のとき、 $T^2 < 0$

*proof.*  $\hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) < 0$  と  $[\vec{u}, \vec{v}]^2 \geq 0$  から、 $T^2 < 0$

**Definition4.4** (角). 二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角  $\Theta$  を次のように定義する。 ( $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) \neq 0$ )

$$(4.10) \quad \cosh \Theta = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})}$$

このときの  $\Theta$  の値は C1 から C6 の場合によって次のようになる。(  $\theta$  は実数)

C1) のとき、Lemma4.2より  $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \geq 1$  となるから、 $\Theta = \theta$  (実数)。

C2) のとき、Lemma4.3より  $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \leq -1$  となるから、 $\Theta = \theta + \pi i_0$ 。

C3) のときは、 $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})$  が純虚数となるので、 $\Theta = \theta + \frac{\pi}{2} i_0$ 。

C4) のときは  $-1 \leq \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \leq 1$  が成り立ち、 $\Theta = \theta i_0$ 。

C5) のときは、 $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \geq 1$  となり、 $\Theta = \theta$ 。



C6) のときは、 $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \leq -1$  となり、 $\Theta = \theta + \pi i$ 。

**Theorem 4.1**(余弦定理). 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  に対して次の式が成り立つ。

$$(4.11) \quad \hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) = \hat{d}^2(\vec{u}) + \hat{d}^2(\vec{v}) - 2\hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}) \cosh \Theta$$

**Lemma 4.5.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  ( $\hat{d}(\vec{u}) \neq 0, \hat{d}(\vec{v}) \neq 0$ ) に対して

$$(4.12) \quad \vec{v}' = [\vec{u}, \vec{v}] \vec{u} - \hat{d}^2(\vec{u}) \vec{v}$$

と置くと  $\hat{d}^2(\vec{v}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u}), [\vec{u}, \vec{v}'] = 0$ 。

*proof.*  $[\vec{u}, \vec{v}'] = 0$  は自明。前半部は下の式よりわかる。

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \hat{d}^2(\vec{v}') &= [\vec{u}, \vec{v}]^2 \hat{d}^2(\vec{u}) - 2[\vec{u}, \vec{v}]^2 \hat{d}^2(\vec{u}) + \hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) \\ &= \hat{d}^2(\vec{u}) (\hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2) \\ &= T^2 \hat{d}^2(\vec{u}) \end{aligned}$$

**Remark 4.1.** 一次独立な二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  で張られる平面を考える。そして、

$$(4.14) \quad \vec{v}' = [\vec{u}, \vec{v}] \vec{u} - \hat{d}^2(\vec{u}) \vec{v}$$

$$(4.15) \quad \vec{u}' = \sqrt{|T^2|} \vec{u}$$

とおく。C1), C2), C3), C5), C6) のときは、 $T^2 < 0$  なので

$$(4.16) \quad [\vec{u}', \vec{v}'] = 0, \hat{d}^2(\vec{u}') = -T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

となる。ゆえに、この平面上の任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$  と  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) について次が成り立つ。

$$(4.17) \quad [\vec{OP}, \vec{OQ}] = -T^2(ac - bd) \hat{d}^2(\vec{u}), \hat{d}^2(\vec{OP}) = -T^2(a^2 - b^2) \hat{d}^2(\vec{u}).$$

このような平面を『双曲的平面』ということにする。 $(\hat{d}^2(\vec{OP}))$  が正にも負にもなる

C4) で  $T^2 > 0$  のときは、

$$(4.18) \quad [\vec{u}', \vec{v}'] = 0, \hat{d}^2(\vec{u}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

となる。ゆえに、この平面上の任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$  と  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) について次が成り立つ。

$$(4.19) \quad [\vec{OP}, \vec{OQ}] = T^2(ac + bd) \hat{d}^2(\vec{u}), \hat{d}^2(\vec{OP}) = T^2(a^2 + b^2) \hat{d}^2(\vec{u}).$$

このような平面を『ユークリッド的平面』ということにする。 $(\hat{d}^2(\vec{OP}))$  が常に正

C4) で特に  $T^2 = 0$  のときは、 $\hat{d}^2(\vec{v}') = 0$  である。ゆえに、この平面上の任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$  と  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) について次が成り立つ。

$$(4.20) \quad [\vec{OP}, \vec{OQ}] = ac\hat{d}^2(\vec{u}), \hat{d}^2(\vec{OP}) = a^2\hat{d}^2(\vec{u}).$$

このような平面を『退化した平面』ということにする。

**Lemma 4.6.** 『退化した平面』上での角は、0 または  $\pi i$  になる。

*proof.* 平面上の二つのベクトル  $\vec{OP}, \vec{OQ}$  は (4.14) の  $\vec{v}'$  を使うと 実数  $a, b, c, d$  を使って、 $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$ ,  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  と表せる。このときの角  $\Theta$  は

$$\cosh \Theta = \frac{ac}{\sqrt{a^2} \sqrt{c^2}} = \pm 1$$

の計算から 0 または  $\pi i$  になる。 □

**Corollary 4.1.** 二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が『直角』のとき  $\Theta = \frac{\pi}{2}i$  となっている。(この角は  $\cos$  で考えると  $\frac{\pi}{2}$  である) このことは角の定義より『ユークリッド的平面』でも『双曲的平面』でも成り立つ。しかし、『退化した平面』内には『直角』はない。

**Remark4.2.** (4.10) で定義した角には加法性が成り立つ。

*proof.* 三次元のと看と同様にして示せる。  $\square$

**Theorem4.2.** 三角形の内角の和は  $\pi i$  となる。

*proof.* 三次元のと看と同様にして示せる。  $\square$

**Theorem4.3.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  の間の角を  $\Theta$  とし、 $[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{PQ}] = 0$  としたとき、次の式が成り立つ。 $(\hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \neq 0)$

$$(4.21) \quad \hat{d}(\overrightarrow{OP}) = \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \cosh \Theta$$

$$(4.22a) \quad \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) = i \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta \quad (C1) \text{ のとき}$$

$$(4.22b) \quad \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) = -i \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta \quad (C3), (C4), (C5) \text{ のとき}$$

*proof.* 三次元のと看と同様にして示せる。  $\square$

**Proposition4.3.**  $\triangle OPQ$  の面積は、 $OPQ$  が『ユークリッド的平面』上にあれば正の実数、 $OPQ$  が『双曲的平面』上にあれば  $-i \times$ (正の実数)、 $OPQ$  が『退化した平面』上にあれば 0 になる。

*proof.* 三次元のと看と同様にして示せる。

**Lemma4.7.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  が『直角』のとき  $\triangle OPQ$  の面積は  $\frac{1}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  になる。

*proof.* 三次元のと看と同様にして示せる。  $\square$

このことから、三角形の面積が次のように定義できる。

**Definition4.5 (面積).** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  の間の角が  $\Theta$  のとき、 $\triangle OPQ$  の面積が次のように定義できる。 $(\hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \neq 0)$

$$(4.23) \quad \begin{cases} \frac{i}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta, & (C1), (C6) \text{ のとき} \\ -\frac{i}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta, & (C2), (C3), (C4), (C5) \text{ のとき} \end{cases}$$

**Corollary4.2.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  によって作られる平行四辺形の面積を  $S$  とすると、 $S^2 = T^2$

*proof.*

$$\begin{aligned} S^2 &= -\hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) \sinh^2 \Theta = \hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) (1 - \cosh^2 \Theta) \\ &= \hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) - [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}]^2 = T^2 \end{aligned}$$

$\square$

**Theorem4.4 (正弦定理).**  $\triangle PQR$  ( $\hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \neq 0$ ) において次の式が成り立つ。(但し、 $\angle P + \angle Q + \angle R = \pi i$ ,  $S$  は  $\triangle PQR$  の面積)

$$(4.24) \quad \frac{\sinh P}{\hat{d}(\overrightarrow{QR})} = \frac{\sinh Q}{\hat{d}(\overrightarrow{PR})} = \frac{\sinh R}{\hat{d}(\overrightarrow{PQ})} = \frac{2iS}{\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})}$$

*proof.*  $\triangle PQR$  を三つの場合の場合わけして考える。

$\gamma 1.$   $\triangle PQR$  は『ユークリッド的平面』にある

$\gamma 2.$   $\triangle PQR$  は『双曲的平面』にある

$\gamma 3.$   $\triangle PQR$  は『退化した平面』にある

それぞれの場合は三次元のと看と同様にして示せる。

## 5. 四次元空間 (2)

四次元空間  $R^4$  に先程のとは違った『内積』と長さを定義します。

**Definition 5.1** (内積). 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1, s_1, t_1)$  と  $\vec{v} = (x_2, y_2, s_2, t_2)$  の『内積』を下のように定義する。

$$(5.1) \quad [\vec{u}, \vec{v}] = x_1 x_2 + y_1 y_2 - s_1 s_2 - t_1 t_2$$

また、 $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$  のとき、 $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  は『直角』ということにする。

**Proposition 5.1.** 『内積』 $[\vec{u}, \vec{v}]$  は次の座標変換に関して不変な量である。(  $\theta$  は実数 )

$$(5.2) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & \sinh \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**Lemma 5.1.** 内積の定義より二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  にたいして次の式が成り立つ。

$$(5.3) \quad [\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}] - 2[\vec{u}, \vec{v}]$$

特に  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が『直角』のときは次の式が成り立つ。

$$(5.4) \quad [\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}]$$

**Definition 5.2** (長さ). ベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1, s_1, t_1)$  の長さを次のように定義する。(但し、 $i = \sqrt{-1}$ )

$$(5.5) \quad \hat{d}(\vec{u}) = \begin{cases} \sqrt{[\vec{u}, \vec{u}]} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - s_1^2 - t_1^2} & x_1^2 + y_1^2 - s_1^2 - t_1^2 \geq 0 \\ -i\sqrt{-[\vec{u}, \vec{u}]} = -i\sqrt{-(x_1^2 + y_1^2 - s_1^2 - t_1^2)} & x_1^2 + y_1^2 - s_1^2 - t_1^2 < 0 \end{cases}$$

**Definition 5.3.** 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, y_1, s_1, t_1)$  と  $\vec{v} = (x_2, y_2, s_2, t_2)$  にたいして  $T^2$  という量を定義する。(  $T^2$  が平行四辺形の面積の二乗になることは Proposition 5.2 で示される )

$$(5.6) \quad \begin{aligned} T^2 &= \hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2 - s_1^2 - t_1^2)(x_2^2 + y_2^2 - s_2^2 - t_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 - s_1 s_2 - t_1 t_2)^2 \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (s_1 t_2 - s_2 t_1)^2 - (x_1 s_2 - x_2 s_1)^2 \\ &\quad - (x_1 t_2 - x_2 t_1)^2 - (y_1 s_2 - y_2 s_1)^2 - (y_1 t_2 - y_2 t_1)^2 \end{aligned}$$

**Proposition5.2.** 四次元空間の基本直交ベクトルを  $e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*$  とし、

$$\hat{d}^2(e_1^*) = \hat{d}^2(e_2^*) = -\hat{d}^2(e_3^*) = -\hat{d}^2(e_4^*) = 1, \quad [e_i^*, e_j^*] = 0 \quad (i, j=1, 2, 3, 4 \quad i \neq j)$$

が成り立っているとする。このとき  $\vec{u} = x_1 e_1^* + y_1 e_2^* + s_1 e_3^* + t_1 e_4^*$  と  $\vec{v} = x_2 e_1^* + y_2 e_2^* + s_2 e_3^* + t_2 e_4^*$  の作る 2-ベクトル  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  の大きさを調べると、

$$(5.7) \quad |\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} [\vec{u}, \vec{u}] & [\vec{u}, \vec{v}] \\ [\vec{v}, \vec{u}] & [\vec{v}, \vec{v}] \end{vmatrix} = \hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2 = T^2$$

となり  $T^2$  になっている。

次に四次元空間  $R^4$  を、円錐  $x^2 + y^2 - s^2 - t^2 = 0$  でもって、A, B の二つの領域に分けます。

$$A: x^2 + y^2 - s^2 - t^2 > 0,$$

$$B: x^2 + y^2 - s^2 - t^2 < 0$$

このとき、二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の位置関係は次の五つの場合が考えられます。

$$D1) \vec{u} \in A, \vec{v} \in A, T^2 < 0$$

$$D2) \vec{u} \in A, \vec{v} \in A, T^2 \geq 0$$

$$D3) \vec{u} \in B, \vec{v} \in B, T^2 < 0$$

$$D4) \vec{u} \in B, \vec{v} \in B, T^2 \geq 0$$

$$D5) \vec{u} \in A, \vec{v} \in B$$

**Lemma5.2.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  に対して

$$(5.8) \quad \vec{v}' = [\vec{u}, \vec{v}] \vec{u} - \hat{d}^2(\vec{u}) \vec{v}$$

と置くと  $\hat{d}^2(\vec{v}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$ ,  $[\vec{u}, \vec{v}'] = 0$ .

*proof.*  $[\vec{u}, \vec{v}'] = 0$  は自明。前半部は下の式よりわかる。

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \hat{d}^2(\vec{v}') &= [\vec{u}, \vec{v}]^2 \hat{d}^2(\vec{u}) - 2 [\vec{u}, \vec{v}]^2 \hat{d}^2(\vec{u}) + \hat{d}^4(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) \\ &= \hat{d}^2(\vec{u}) ((\hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2) \\ &= T^2 \hat{d}^2(\vec{u}) \end{aligned}$$

□

**Lemma5.3.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  が D2) のとき、任意の実数  $p, q$  に対して  $p\vec{u} + q\vec{v} \in A$  となる。

*proof.*  $\vec{u} \in A, \vec{v} \in A$  なので次の式が成り立つ。

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \hat{d}^2(p\vec{u} + q\vec{v}) &= p^2 \hat{d}^2(\vec{u}) + 2pq [\vec{u}, \vec{v}] + q^2 \hat{d}^2(\vec{v}) \\ &= \left[ p\hat{d}(\vec{u}) + \frac{q[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u})} \right]^2 + q^2 \frac{\hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2}{\hat{d}^2(\vec{u})} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

等号は  $T^2 = 0$  で  $p = -q \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}^2(\vec{u})}$  のとき成立。

□

**Lemma5.4.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  が D4) のとき、任意の実数  $p, q$  に対して  $p\vec{u} + q\vec{v} \in B$  となる。

*proof.*  $\hat{d}(\vec{u}), \hat{d}(\vec{v})$  のどちらも純虚数だから、次が成り立つ。

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \hat{d}^2(p\vec{u} + q\vec{v}) &= p^2 \hat{d}^2(\vec{u}) + 2pq [\vec{u}, \vec{v}] + q^2 \hat{d}^2(\vec{v}) \\ &= \left[ p\hat{d}(\vec{u}) + \frac{q[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u})} \right]^2 + q^2 \frac{\hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2}{\hat{d}^2(\vec{u})} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

等号は  $T^2 = 0$  で  $p = -q [\vec{u}, \vec{v}] / \hat{d}^2(\vec{u})$  のとき成立。

□

Lemma5.3のような平面 (常に A に含まれる) を『ユークリッド的平面』、Lemma5.4のような平面 (常に B に含まれる) を『負のユークリッド的平面』と呼ぶことにする。

**Lemma5.5.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  が異なる領域にあるとき (D5)、 $p\vec{u}+q\vec{v}$  は実数  $p, q$  の値によって、 $A$  の領域にも  $B$  の領域にもなる。

*proof.* 実数  $p, q$  のいずれかが 0 のときを考えれば自明 □

Lemma 5.5のような平面 ( $A$  の領域にも  $B$  の領域にもなる) を『双曲的平面』と呼ぶことにする。

**Lemma5.6.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  が D1) または D3) のとき、 $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  は『双曲的平面』を張る。

*proof.* D1) のときは、(5.8) の  $\vec{v}'$  が  $\hat{d}^2(\vec{v}') < 0$  となり『双曲的平面』だと判る。D3) のときは、(5.8) の  $\vec{v}'$  が  $\hat{d}^2(\vec{v}') > 0$  となって『双曲的平面』になる。 □

**Definition5.4** (角). 二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角  $\Theta$  を次のように定義する。( $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) \neq 0$ )

$$(5.12) \quad \cosh \Theta = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})}$$

このときの  $\Theta$  の値は D1 から D5 の場合によって次のようになる。( $\theta$  は実数)

D1) のときは、 $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]^2}{\hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v})} > 1$  となるので、 $[\vec{u}, \vec{v}] > 0$  ならば  $\Theta = \theta$  (実数)、 $[\vec{u}, \vec{v}] < 0$  ならば  $\Theta = \theta + \pi i$

D2) のときは、 $-1 \leq \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \leq 1$  となるので  $\Theta = \theta i$ 。

D3) のときは、 $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]^2}{\hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v})} > 1$  ゆえに  $[\vec{u}, \vec{v}] > 0$  ならば  $\Theta = \theta + \pi i$ 、 $[\vec{u}, \vec{v}] < 0$  ならば  $\Theta = \theta$  (実数)。

D4) のときは、 $-1 \leq \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})} \leq 1$  となるので  $\Theta = \theta i$ 。

D5) のときは、 $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})$  が純虚数となるので、 $\Theta = \theta + \frac{\pi}{2} i$ 。

**Theorem5.1** (余弦定理). 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  に対して次の式が成り立つ。

$$(5.13) \quad \hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) = \hat{d}^2(\vec{u}) + \hat{d}^2(\vec{v}) - 2\hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}) \cosh \Theta$$

**Remark5.1** 二つのベクトルが、 $\hat{d}^2(\vec{u})=1, \hat{d}^2(\vec{v})=1$ を満たすとき次が成り立つ。

$\hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) > 4$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] < -1$ , ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角は  $\theta + \pi i$ )

$0 \leq \hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) \leq 4$  のとき、 $-1 \leq [\vec{u}, \vec{v}] \leq 1$ , ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角は  $\theta i$ )

$\hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) < 0$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] > 1$  ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角は実数  $\theta$ )。

*proof.* 次の式より明らか。

$$\hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) = \hat{d}^2(\vec{u}) - 2[\vec{u}, \vec{v}] + \hat{d}^2(\vec{v}) = 2(1 - [\vec{u}, \vec{v}])$$

□

**Remark5.2.** 二つのベクトルが、 $\hat{d}^2(\vec{u})=-1, \hat{d}^2(\vec{v})=-1$ を満たすとき次が成り立つ。

$\hat{d}^2(\vec{u}+\vec{v}) > 0$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] > 1$ , ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角は  $\theta + \pi i$ )

$-4 \leq \hat{d}^2(\vec{u}+\vec{v}) \leq 0$  のとき、 $-1 \leq [\vec{u}, \vec{v}] \leq 1$ , ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角は  $\theta i$ )

$\hat{d}^2(\vec{u}+\vec{v}) < -4$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] < -1$  ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角は実数  $\theta$ )。

*proof.* 次の式より明らか。

$$\hat{d}^2(\vec{u}+\vec{v}) = \hat{d}^2(\vec{u}) + 2[\vec{u}, \vec{v}] + \hat{d}^2(\vec{v}) = -2(1 - [\vec{u}, \vec{v}])$$

□

**Remark5.3.** 二つのベクトル  $\vec{u} \in A, \vec{v} \in A$  で張られる平面を考える。

$$(5.14) \quad \vec{v}' = [\vec{u}, \vec{v}] \vec{u} - \hat{d}^2(\vec{u}) \vec{v}$$

$$(5.15) \quad \vec{u}' = \sqrt{|T^2|} \vec{u}$$

と置と、 $[u', v'] = 0$ ,  $\hat{d}^2(\vec{v}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  を満たしている。

$T^2 > 0$  のときは『ユークリッド的平面』になり、 $\hat{d}^2(\vec{u}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  が成り立つ。この平面上の任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$ ,  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = (ac + bd)T^2 \hat{d}^2(\vec{u}), \quad \hat{d}^2(\vec{OP}) = (a^2 + b^2)T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

$T^2 < 0$  のときは『双曲的平面』になり、 $\hat{d}^2(\vec{v}') = -T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  が成り立つ。この平面上の任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$ ,  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = -(ac - bd)T^2 \hat{d}^2(\vec{u}), \quad \hat{d}^2(\vec{OP}) = -(a^2 - b^2)T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

$T^2 = 0$  のときは『退化した平面』ということにする。このとき  $\hat{d}^2(\vec{v}') = 0$  より任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$ ,  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = ac \hat{d}^2(\vec{u}), \quad \hat{d}^2(\vec{OP}) = a^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

**Remark5.4.** 二つのベクトル  $\vec{u} \in B$ ,  $\vec{v} \in B$  で張られる平面を考える。

$$(5.16) \quad \vec{v}' = [\vec{u}, \vec{v}] \vec{u} - \hat{d}^2(\vec{u}) \vec{v}$$

$$(5.17) \quad \vec{u}' = \sqrt{|T^2|} \vec{u}$$

と置と、 $[u', v'] = 0$ ,  $\hat{d}^2(\vec{v}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$ 。

$T^2 > 0$  のときは『負のユークリッド的平面』になり、 $\hat{d}^2(\vec{u}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  が成り立つ。この平面上の任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$ ,  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = (ac + bd)T^2 \hat{d}^2(\vec{u}), \quad \hat{d}^2(\vec{OP}) = (a^2 + b^2)T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

$T^2 < 0$  のときは『双曲的平面』になり、 $\hat{d}^2(\vec{u}') = -T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  が成り立つ。この平面上の任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$ ,  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = -(ac - bd)T^2 \hat{d}^2(\vec{u}), \quad \hat{d}^2(\vec{OP}) = -(a^2 - b^2)T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

$T = 0$  のときは『退化した平面』ということにする。このとき  $\hat{d}^2(\vec{v}') = 0$  より任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = a\vec{u}' + b\vec{v}'$ ,  $\vec{OQ} = c\vec{u}' + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = ac \hat{d}^2(\vec{u}), \quad \hat{d}^2(\vec{OP}) = a^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

**Lemma5.7.** 『退化した平面』内では、長さが0でない二つのベクトルのなすの角は、0 または  $\pi i$  になる。

*proof.* 二つのベクトルが  $\vec{u} \in A$ ,  $\vec{v} \in A$  のとき (5.14) の  $\vec{v}'$  と  $\vec{u}$  を使うと  $\hat{d}^2(\vec{v}') = 0$  が成り立つので、 $\vec{OP} = a\vec{u} + b\vec{v}'$  と、 $\vec{OQ} = c\vec{u} + d\vec{v}'$  ( $a, b, c, d$  は実数) の間の角  $\Theta$  は

$$\cosh \Theta = \frac{ac}{\sqrt{a^2} \sqrt{c^2}} = \pm 1$$

より 0 または  $\pi i$  となる。二つのベクトルが  $\vec{u} \in B, \vec{v} \in B$  のときも (5.16) の  $\vec{v}'$  と  $\vec{u}$  を使って同様に示せる。  $\square$

**Corollary5.1.** 二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が『直角』のときは  $\Theta = \frac{\pi}{2}i$ 。(この角は  $\cos$  で考えると  $\frac{\pi}{2}$  である) このことは角の定義より『ユークリッド的平面』でも『負のユークリッド的平面』でも『双曲的平面』でも成り立つ。しかし、『退化した平面』内には『直角』はない。

**Remark5.5.** (5.12) で定義した角には加法性が成り立つ。

*proof.* 『ユークリッド的平面』、『双曲的平面』、『退化した平面』のときは三次元のときと同じであ

る。負のユークリッド的平面』のときも同様にして示せる  $\square$

**Theorem5.2.** 三角形の内角の和は  $\pi i$  となる。

*proof* 『ユークリッド的平面』、『双曲的平面』、『退化した平面』のときは三次元のときと同じである。負のユークリッド的平面』のときも同様にして示せる  $\square$

**Theorem5.3** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  の間の角を  $\Theta$  とし、 $[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{PQ}] = 0$  としたとき、次の式が成り立つ。 $(\hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \neq 0)$  (但し、 $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  は『退化した平面』上にはない)

$$(5.18) \quad \hat{d}(\overrightarrow{OP}) = \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \cosh \Theta$$

$$(5.19a) \quad \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) = i\hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta \quad (D3) \text{ のとき}$$

$$(5.19b) \quad \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) = -i\hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta \quad (D1, D2, D4, D5) \text{ のとき}$$

*proof.* 次の二式より (5.18) と  $\hat{d}^2(\overrightarrow{PQ}) = -\hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) \sinh^2 \Theta$  が導ける。

$$(5.20) \quad \hat{d}^2(\overrightarrow{PQ}) = \hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) + \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) - 2 \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \cosh \Theta$$

$$(5.21) \quad \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) = \hat{d}^2(\overrightarrow{PQ}) + \hat{d}^2(\overrightarrow{OP})$$

$\triangle OPQ$  が『ユークリッド的平面』や『双曲的平面』上にあるときは三次元のときと同じなので問題はない。『負のユークリッド的平面』上(D4)にあるときは、 $\hat{d}(\overrightarrow{PQ})$  と  $\hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  が  $-i \times$  (正の実数)、 $\sinh \Theta$  は  $i \times$  (正の実数) ゆえに (5.19b) が成り立つ。  $\square$

**Proposition5.3.**  $\triangle OPQ$  の面積は、 $OPQ$  が『ユークリッド的平面』上にあれば正の実数、 $OPQ$  が『双曲的平面』上にあれば  $-i \times$  (正の実数)、 $OPQ$  が『負のユークリッド的平面』上にあれば正の実数、 $OPQ$  が『退化した平面』上にあれば 0 になる。

*proof.* 『ユークリッド的平面』、『双曲的平面』、『退化した平面』のときは三次元のときと同じ。『負のユークリッド的平面』の場合は『ユークリッド的平面』のときと同様に計算できるが、平面上の線分はすべて  $-i \times$  (正の実数) と表せるので面積は負の実数となる。  $\square$

**Lemma5.8.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  が『直角』のとき  $\triangle OPQ$  の面積は  $\frac{1}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  になる。

*proof.*  $\triangle OPQ$  が『ユークリッド的平面』『双曲的平面』にあるときは三次元のときと同じである。『負のユークリッド的平面』のときは『ユークリッド的平面』と同様に考えて成り立つ。  $\square$

このことから、三角形の面積が次のように定義できる。

**Definition5.8.** (面積). 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  の間の角が  $\Theta$  のとき、 $\triangle OPQ$  の面積が次のように定義できる。 $(\hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \neq 0)$

$$(5.22)$$

$$\begin{cases} \frac{i}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta, & (OP, OQ \in A, \Theta = \theta + \pi i \text{ のとき}, OP, OQ \in B, \Theta = \theta \text{ のとき}) \\ -\frac{i}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \Theta, & (\text{上以外のとき}) \end{cases}$$

**Corollary5.2.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  によって作られる平行四辺形の面積を  $S$  とすると、

$$S^2 = T^2$$

*proof.*

$$\begin{aligned} S^2 &= -\hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) \sinh^2 \Theta = \hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) (1 - \cosh^2 \Theta) \\ &= \hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) - [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}]^2 = T^2 \end{aligned}$$

となり導ける。  $\square$

**Theorem 5.4** (正弦定理).  $\triangle PQR$  ( $\hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \neq 0$ ) において次の式が成り立つ。(但し、 $\angle P + \angle Q + \angle R = \pi i$ ,  $S$  は  $\triangle PQR$  の面積)

$$(5.23) \quad \frac{\sinh P}{\hat{d}(\overrightarrow{QR})} = \frac{\sinh Q}{\hat{d}(\overrightarrow{PR})} = \frac{\sinh R}{\hat{d}(\overrightarrow{PQ})} = \frac{2iS}{\hat{d}(\overrightarrow{PQ})\hat{d}(\overrightarrow{QR})\hat{d}(\overrightarrow{RP})}$$

*proof*  $\triangle PQR$  を四つの場合の場合わけして考える。

- $\delta 1.$   $\triangle PQR$  が『ユークリッド的平面』にある
- $\delta 2.$   $\triangle PQR$  が『双曲的平面』にある
- $\delta 3.$   $\triangle PQR$  は『負のユークリッド的平面』にある
- $\delta 4.$   $\triangle PQR$  は『退化した平面』にある

このうち  $\delta 3.$  以外の場合は三次元の時と同じだから、 $\delta 3.$  のときを示す。 $\angle P = \theta i, \angle Q = \phi i, \angle R = \psi i$  と仮定する。 $(\theta, \phi, \psi$  は正の実数) このとき、

$$\begin{aligned} 2S &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \sinh(\theta i) \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh(\phi i) \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh(\psi i) \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})$  で割ると (5.23) が得られる。

## 6. $m+n$ 次元空間

$m+n$  次元空間  $R^{m+n}$  ( $m, n$  は自然数) に『内積』と長さを定義します。

**Definition 6.1** (内積). 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_n)$  と  $\vec{v} = (y_1, \dots, y_m, b_1, \dots, b_n)$  の『内積』を下のように定義する。

$$(6.1) \quad [\vec{u}, \vec{v}] = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m - a_1 b_1 - \dots - a_n b_n = \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

また、 $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$  のとき、 $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  は『直角』ということにする。

**Lemma 6.1.** 内積の定義より二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  にたいして次の式が成り立つ。

$$(6.2) \quad [\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}] - 2[\vec{u}, \vec{v}]$$

特に  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が『直角』のときは次の式が成り立つ。

$$(6.3) \quad [\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{v}]$$

**Definition 6.2** (長さ). ベクトル  $\vec{u} = (x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_n)$  の長さを次のように定義する。

(但し、 $i = \sqrt{-1}$ )

$$(6.4) \quad \hat{d}(\vec{u}) = \begin{cases} \sqrt{[\vec{u}, \vec{u}]} = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2} & \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0 \\ -i\sqrt{-[\vec{u}, \vec{u}]} = -i\sqrt{-(\sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2)} & \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 < 0 \end{cases}$$

**Definition 6.3.** 二つのベクトル  $\vec{u} = (x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_n)$  と  $\vec{v} = (y_1, \dots, y_m, b_1, \dots, b_n)$  にたいして  $T^2$  という量を定義する。 $(T^2$  が平行四辺形の面積の二乗になることは Proposition 6.1 で示される)



$$\begin{aligned}
 (6.5) \quad T^2 &= \hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2 \\
 &= (x_1^2 + \cdots + x_m^2 - a_1^2 - \cdots - a_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_m^2 - b_1^2 - \cdots - b_n^2) \\
 &\quad - (x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n)^2 \\
 &= \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 + \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 - \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} (x_i b_j - y_j a_i)^2
 \end{aligned}$$

**Proposition 6.1.**  $m+n$ 次元空間の基本直交ベクトルを  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{m+n}$  とし、

$$\begin{aligned}
 \hat{d}^2(\vec{e}_1) &= \cdots = \hat{d}^2(\vec{e}_m) = -\hat{d}^2(\vec{e}_{m+1}) = \cdots = -\hat{d}^2(\vec{e}_{m+n}) = 1 \\
 [\vec{e}_i, \vec{e}_j] &= 0 \quad (1 \leq i, j \leq m+n \quad i \neq j)
 \end{aligned}$$

が成り立っているとする。このとき  $\vec{u} = \sum_{k=1}^m x_k \vec{e}_k + \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k \vec{e}_k$  と  $\vec{v} = \sum_{k=1}^m y_k \vec{e}_k$

+  $\sum_{k=m+1}^{m+n} b_k \vec{e}_k$  の作る 2-ベクトル  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  の大きさを調べると、

$$(6.6) \quad |\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} [\vec{u}, \vec{u}] & [\vec{u}, \vec{v}] \\ [\vec{v}, \vec{u}] & [\vec{v}, \vec{v}] \end{vmatrix} = \hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2 = T^2$$

となり  $T^2$  になっている。

次に  $m+n$ 次元空間  $R^{m+n}$  を、円錐  $x_1^2 + \cdots + x_m^2 - a_1^2 - \cdots - a_n^2 = 0$  でもって、A, B の二つの領域に分けます。

$$A: x_1^2 + \cdots + x_m^2 - a_1^2 - \cdots - a_n^2 > 0,$$

$$B: x_1^2 + \cdots + x_m^2 - a_1^2 - \cdots - a_n^2 < 0$$

このとき、二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の位置関係は次の五つの場合が考えられます。

$$E1) \vec{u} \in A, \vec{v} \in A, T^2 < 0$$

$$E2) \vec{u} \in A, \vec{v} \in A, T^2 \geq 0$$

$$E3) \vec{u} \in B, \vec{v} \in B, T^2 < 0$$

$$E4) \vec{u} \in B, \vec{v} \in B, T^2 \geq 0$$

$$E5) \vec{u} \in A, \vec{v} \in B$$

**Lemma 6.2.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  に対して

$$(6.7) \quad \vec{v}' = [\vec{u}, \vec{v}] \vec{u} - \hat{d}^2(\vec{u}) \vec{v}$$

と置くと  $\hat{d}^2(\vec{v}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$ ,  $[\vec{u}, \vec{v}'] = 0$ 。

*proof*  $[\vec{u}, \vec{v}'] = 0$  は自明。前半部は下の式よりわかる。

$$\begin{aligned}
 (6.7) \quad \hat{d}^2(\vec{v}') &= [\vec{u}, \vec{v}]^2 \hat{d}^2(\vec{u}) - 2 [\vec{u}, \vec{v}]^2 \hat{d}^2(\vec{u}) + \hat{d}^4(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) \\
 &= \hat{d}^2(\vec{u}) (\hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2) \\
 &= T^2 \hat{d}^2(\vec{u})
 \end{aligned}$$

□

**Lemma 6.3.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  が E2) のとき、任意の実数  $p, q$  に対して  $p\vec{u} + q\vec{v} \in A$  となる。

*proof.*  $\vec{u} \in A, \vec{v} \in A$  なので次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \hat{d}^2(p\vec{u} + q\vec{v}) &= p^2 \hat{d}^2(\vec{u}) + 2pq [\vec{u}, \vec{v}] + q^2 \hat{d}^2(\vec{v}) \\
 &= \left[ p \hat{d}^2(\vec{u}) + \frac{q [\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}^2(\vec{u})} \right]^2 + q^2 \frac{\hat{d}^2(\vec{u}) \hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2}{\hat{d}^2(\vec{u})} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

(等号は  $T^2=0$ ,  $p=-q \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}^2(\vec{u})}$  のとき成立)

□

**Lemma6.4.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  が  $E4$  のとき、任意の実数  $p, q$  に対して  $p\vec{u}+q\vec{v} \in B$  となる。

*proof.*  $\hat{d}(\vec{u}), \hat{d}(\vec{v})$  のどちらも純虚数だから、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \hat{d}^2(p\vec{u}+q\vec{v}) &= p^2 \hat{d}^2(\vec{u}) + 2pq [\vec{u}, \vec{v}] + q^2 \hat{d}^2(\vec{v}) \\ &= \left[ p\hat{d}(\vec{u}) + \frac{q[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u})} \right]^2 + q^2 \frac{\hat{d}^2(\vec{u})\hat{d}^2(\vec{v}) - [\vec{u}, \vec{v}]^2}{\hat{d}^2(\vec{u})} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

(等号は  $T^2=0$ ,  $p=-q \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}^2(\vec{u})}$  のとき成立)

Lemma6.3のような平面 (常に  $A$  に含まれる) を『ユークリッド的平面』、Lemma 6.4のような平面 (常に  $B$  に含まれる) を『負のユークリッド的平面』と呼ぶことにする。

**Lemma6.5.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  が異なる領域にあるとき ( $E5$ )、 $p\vec{u}+q\vec{v}$  は実数  $p, q$  の値によって、 $A$  の領域にも  $B$  の領域にもなる。

*proof.* 実数  $p, q$  のいずれかが  $0$  のときを考えれば自明

Lemma 6.5のような平面 ( $A$  の領域にも  $B$  の領域にもなる) を『双曲的平面』と呼ぶことにする。

**Lemma6.6.** 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  が  $E1$  または  $E3$  のとき、 $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  は『双曲的平面』を張る。

*proof.*  $E1$  のときは、(6.7) の  $v'$  が  $\hat{d}^2(\vec{v}') < 0$  となり『双曲的平面』と判る。 $E3$  のときは、(6.7) の  $\vec{v}'$  が  $\hat{d}^2(\vec{v}') > 0$  となって『双曲的平面』になる。

**Lemma6.7.** 特に  $m=1$  のときは、二つのベクトル  $\vec{u}=(x_1, a_1, \dots, a_n) \in A, \vec{v}=(y_1, b_1, \dots, b_n) \in A$  は  $T^2 < 0$ 。(このとき  $E2$  はない)

*proof.*  $x_1 y_1 > 0$  のとき  $|x_1| > \hat{d}(\vec{u}), |y_1| > \hat{d}(\vec{v})$  と、 $a_1^2 + \dots + a_n^2 = x_1^2 - \hat{d}^2(\vec{u}), b_1^2 + \dots + b_n^2 = y_1^2 - \hat{d}^2(\vec{v})$  を使うと、

$$\begin{aligned} &(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 - (x_1 y_1 - \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= (x_1^2 - \hat{d}^2(\vec{u}))(y_1^2 - \hat{d}^2(\vec{v})) - \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 - (x_1 y_1 - \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= - \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 - (x_1 \hat{d}(\vec{v}) - y_1 \hat{d}(\vec{u}))^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

となり、 $-x_1 y_1 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq -\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) \leq 0$ 。ゆえに  $T^2 \leq 0$ 。(等号は  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が平行のとき成立)

$x_1 y_1 < 0$  のときも上と同様に計算して

$$\begin{aligned} &(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 - (x_1 y_1 + \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= (x_1^2 - \hat{d}^2(\vec{u}))(y_1^2 - \hat{d}^2(\vec{v})) - \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 - (x_1 y_1 + \hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= - \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 - (x_1 \hat{d}(\vec{v}) + y_1 \hat{d}(\vec{u}))^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

となり、 $-x_1y_1 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geq \hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}) \geq 0$ 。ゆえに  $T^2 \leq 0$ 。(等号は  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が平行のとき成立)

**Lemma6.8.** 特に  $n=1$  のときは、二つのベクトル  $\vec{u}=(x_1, \cdots, x_m, a_1) \in B$ ,  $\vec{v}=(y_1, \cdots, y_m, b_1) \in B$  は  $T^2 < 0$ 。(このとき  $E4$  はない)

*proof.*  $a_1b_1 > 0$  のとき  $|a_1| > |\hat{d}(\vec{u})|$ ,  $|b_1| > |\hat{d}(\vec{v})|$  と、 $x_1^2 + \cdots + x_m^2 = a_1^2 - \hat{d}^2(\vec{u})$ ,  $y_1^2 + \cdots + y_m^2 = b_1^2 - \hat{d}^2(\vec{v})$  を使うと、

$$\begin{aligned} & (x_1y_1 + \cdots + x_my_m)^2 - (a_1b_1 + \hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= (a_1^2 - \hat{d}^2(\vec{u}))(b_1^2 - \hat{d}^2(\vec{v})) - \sum_{i < j} (x_iy_j - x_jy_i)^2 - (a_1b_1 + \hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= - \sum_{i < j} (x_iy_j - x_jy_i)^2 + (a_1\hat{d}(\vec{v}) - b_1\hat{d}(\vec{u}))^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

となり、 $x_1y_1 + \cdots + x_my_m - a_1b_1 \leq \hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}) \leq 0$ 。ゆえに  $T^2 < 0$ 。(等号は  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が平行のとき成立)

$a_1b_1 < 0$  のときも上と同様に計算して

$$\begin{aligned} & (x_1y_1 + \cdots + x_my_m)^2 - (a_1b_1 - \hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= (a_1^2 - \hat{d}^2(\vec{u}))(b_1^2 - \hat{d}^2(\vec{v})) - \sum_{i < j} (x_iy_j - x_jy_i)^2 - (a_1b_1 - \hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}))^2 \\ &= - \sum_{i < j} (x_iy_j - x_jy_i)^2 + (a_1\hat{d}(\vec{v}) + b_1\hat{d}(\vec{u}))^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

となり、 $x_1y_1 + \cdots + x_my_m - a_1b_1 \leq -\hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}) \leq 0$ 。ゆえに  $T^2 \leq 0$ 。(等号は  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が平行のとき成立)

**Definition6.4(角).** 二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の間の角  $\Theta$  を次のように定義する。 $(\hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v}) \neq 0)$

$$(6.9) \quad \cosh \Theta = \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v})}$$

このときの  $\Theta$  の値は E1 から E5 の場合によって次のようになる。 $(\theta$  は実数)

E1) のときは、 $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]^2}{\hat{d}^2(\vec{u})\hat{d}^2(\vec{v})} > 1$  となるので、 $[\vec{u}, \vec{v}] > 0$  ならば  $\Theta = \theta$  (実数)、 $[\vec{u}, \vec{v}] < 0$  ならば  $\Theta = \theta + \pi i$

E2) のときは、 $-1 \leq \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v})} \leq 1$  となるので  $\Theta = \theta i$ 。

E3) のときは、 $\frac{[\vec{u}, \vec{v}]^2}{\hat{d}^2(\vec{u})\hat{d}^2(\vec{v})} > 1$  ゆえに  $[\vec{u}, \vec{v}] > 0$  ならば  $\Theta = \theta + \pi i$ 、 $[\vec{u}, \vec{v}] < 0$  ならば  $\Theta = \theta$  (実数)。

E4) のときは、 $-1 \leq \frac{[\vec{u}, \vec{v}]}{\hat{d}(\vec{u})\hat{d}(\vec{v})} \leq 1$  となるので  $\Theta = \theta i$ 。

E5) のときは、 $\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v})$  が純虚数となるので、 $\Theta = \theta + \frac{\pi}{2}i$ 。

**Theorem6.1** (余弦定理) 二つのベクトル  $\vec{u}, \vec{v}$  に対して次の式が成り立つ。

$$(6.10) \quad \hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) = \hat{d}^2(\vec{u}) + \hat{d}^2(\vec{v}) - 2\hat{d}(\vec{u}) \hat{d}(\vec{v}) \cosh \Theta$$

**Remark6.1.** 二つのベクトルが、 $\hat{d}^2(\vec{u})=1, \hat{d}^2(\vec{v})=1$  を満たすとき次が成り立つ。

$\hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) > 4$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] < -1$ , ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  のなす角が  $\theta + \pi i$ )

$0 \leq \hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) \leq 4$  のとき、 $-1 \leq [\vec{u}, \vec{v}] \leq 1$ , ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  のなす角が  $\theta i$ )

$\hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) < 0$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] > 1$  ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  のなす角が実数  $\theta$ )。

proof. 次の式より明らか。

$$\hat{d}^2(\vec{u}-\vec{v}) = \hat{d}^2(\vec{u}) - 2[\vec{u}, \vec{v}] + \hat{d}^2(\vec{v}) = 2(1 - [\vec{u}, \vec{v}])$$

**Remark6.2.** 二つのベクトルが、 $\hat{d}^2(\vec{u})=-1, \hat{d}^2(\vec{v})=-1$  を満たすとき次が成り立つ。

$\hat{d}^2(\vec{u}+\vec{v}) > 0$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] > 1$ , ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  のなす角が  $\theta + \pi i$ )

$-4 \leq \hat{d}^2(\vec{u}+\vec{v}) \leq 0$  のとき、 $-1 \leq [\vec{u}, \vec{v}] \leq 1$ , ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  のなす角が  $\theta i$ )

$\hat{d}^2(\vec{u}+\vec{v}) < -4$  のとき、 $[\vec{u}, \vec{v}] < -1$ . ( $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  のなす角が実数  $\theta$ )

proof. 次の式より明らか。

$$\hat{d}^2(\vec{u}+\vec{v}) = \hat{d}^2(\vec{u}) + 2[\vec{u}, \vec{v}] + \hat{d}^2(\vec{v}) = -2(1 - [\vec{u}, \vec{v}])$$

**Remark6.3.** 二つのベクトル  $\vec{u} \in A, \vec{v} \in A$  で張られる平面を考える。

$$(6.11) \quad \vec{v}' = [\vec{u}, \vec{v}]\vec{u} - \hat{d}^2(\vec{u})\vec{v}$$

$$(6.12) \quad \vec{u}' = \sqrt{|T^2|} \vec{u}$$

と置と、 $[u', v'] = 0, \hat{d}^2(\vec{v}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  を満たしている。

$T^2 > 0$  のときは『ユークリッド的平面』で、 $\hat{d}^2(\vec{u}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  が成り立ち、任意の二つのベクトル

$\vec{OP} = p\vec{u}' + q\vec{v}', \vec{OQ} = r\vec{u}' + s\vec{v}'$  ( $p, q, r, s$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = (pr + qs)T^2 \hat{d}^2(\vec{u}), \hat{d}^2(\vec{OP}) = (p^2 + q^2)T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

$T^2 < 0$  のときは『双曲的平面』で、 $\hat{d}^2(\vec{u}') = -T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  が成り立ち、任意の二つのベクトル  $\vec{OP}$

$= p\vec{u}' + q\vec{v}', \vec{OQ} = r\vec{u}' + s\vec{v}'$  ( $p, q, r, s$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = -(pr - qs)T^2 \hat{d}^2(\vec{u}), \hat{d}^2(\vec{OP}) = -(p^2 - q^2)T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

$T^2 = 0$  のときは『退化した平面』ということにする。このとき ( $\hat{d}^2(\vec{v}') = 0$ ) より 任意の二つのベ

クトル  $\vec{OP} = p\vec{u} + q\vec{v}, \vec{OQ} = r\vec{u} + s\vec{v}$  ( $p, q, r, s$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = (pr) \hat{d}^2(\vec{u}), \hat{d}^2(\vec{OP}) = (p^2) \hat{d}^2(\vec{u})$$

**Remark6.4.** 二つのベクトル  $\vec{u} \in B, \vec{v} \in B$  で張られる平面を考える。

$$(6.13) \quad \vec{v}' = [\vec{u}, \vec{v}]\vec{u} - \hat{d}^2(\vec{u})\vec{v}$$

$$(6.14) \quad \vec{u}' = \sqrt{|T^2|} \vec{u}$$

と置くと、 $[u', v'] = 0, \hat{d}^2(\vec{v}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  を満たしている。

$T^2 > 0$  のときは『負のユークリッド的平面』で  $\hat{d}^2(\vec{u}') = T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  が成り立ち、任意の二つのベクトル  $\vec{OP} = p\vec{u}' + q\vec{v}', \vec{OQ} = r\vec{u}' + s\vec{v}'$  ( $p, q, r, s$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = (pr + qs)T^2 \hat{d}^2(\vec{u}), \hat{d}^2(\vec{OP}) = (p^2 + q^2)T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

$T^2 < 0$  のときは『双曲的平面』で  $\hat{d}^2(\vec{u}') = -T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$  が成り立ち、任意の二つのベクトル  $\vec{OP}$

$=p\vec{u}+q\vec{v}, \vec{OQ}=r\vec{u}'+s\vec{v}'$  ( $p, q, r, s$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = -(pr - qs)T^2 \hat{d}^2(\vec{u}), \quad \hat{d}^2(\vec{OP}) = -(p^2 - q^2)T^2 \hat{d}^2(\vec{u})$$

$T^2=0$  のときは『退化した平面』ということにする。このとき ( $\hat{d}^2(\vec{v})=0$ ) より 任意の二つのベクトル  $\vec{OP}=p\vec{u}+q\vec{v}, \vec{OQ}=r\vec{u}'+s\vec{v}'$  ( $p, q, r, s$  は実数) について次が成り立つ。

$$[\vec{OP}, \vec{OQ}] = (pr) \hat{d}^2(\vec{u}), \quad \hat{d}^2(\vec{OP}) = (p^2) \hat{d}^2(\vec{u})$$

**Lemma6.9.** 『退化した平面』内で、長さが0でない二つのベクトルのなす角は、0 または  $\pi i$  になる。

*proof.* 二つのベクトルが  $\vec{u} \in A, \vec{v} \in A$  のとき (6.7) の  $\vec{v}'$  と  $\vec{u}$  を使うと  $\hat{d}^2(\vec{v})=0$  が成り立つので、 $\vec{OP}=p\vec{u}+q\vec{v}'$  と  $\vec{OQ}=r\vec{u}+s\vec{v}'$  の間の角  $\Theta$  は

$$\cosh \Theta = \frac{pr}{\sqrt{p^2} \sqrt{r^2}} = \pm 1$$

より 0 または  $\pi i$  となる。二つのベクトルが  $\vec{u} \in B, \vec{v} \in B$  のときも同じように  $\vec{u}$  と  $\vec{v}'$  を使って証明できる。 □

**Corollary6.1.** 二つのベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  が『直角』のとき  $\Theta = \frac{\pi}{2}i$ 。(これは  $\cos$  で考えると  $\frac{\pi}{2}$ ) このことは角の定義より『ユークリッド的平面』でも『負のユークリッド的平面』でも『双曲的平面』でも成り立つ。しかし、『退化した平面』内には『直角』はない。

**Remark6.5.** (6.9) で定義した角には加法性が成り立つ。

*proof.* 四次元 (2) のときと同じ。 □

**Theorem6.2.** 三角形の内角の和は  $\pi i$  となる。

*proof.* 四次元 (2) のときと同じ。 □

**Theorem6.3.** 二つのベクトル  $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  の間の角を  $\Theta$  とし、 $[\vec{OP}, \vec{PQ}]=0$  としたとき、次の式が成り立つ。 $(\hat{d}(\vec{OP}) \neq 0, \hat{d}(\vec{OP}) \neq 0, \hat{d}(\vec{OP}) \neq 0)$  (但し、 $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  は『退化した平面』上にはない)

$$(6.15) \quad \hat{d}(\vec{OP}) = \hat{d}(\vec{OQ}) \cosh \Theta$$

$$(6.16a) \quad \hat{d}(\vec{PQ}) = i \hat{d}(\vec{OQ}) \sinh \Theta \quad (D3) \text{ のとき}$$

$$(6.16b) \quad \hat{d}(\vec{PQ}) = -i \hat{d}(\vec{OQ}) \sinh \Theta \quad (D1, D2, D4, D5) \text{ のとき}$$

*proof.* 次の二式より (6.15) と  $\hat{d}^2(\vec{PQ}) = -\hat{d}^2(\vec{OQ}) \sinh^2 \Theta$  が導ける。

$$(6.17) \quad \hat{d}^2(\vec{PQ}) = \hat{d}^2(\vec{OP}) + \hat{d}^2(\vec{OQ}) - 2 \hat{d}(\vec{OP}) \hat{d}(\vec{OQ}) \cosh \Theta$$

$$(6.18) \quad \hat{d}^2(\vec{OQ}) = \hat{d}^2(\vec{PQ}) + \hat{d}^2(\vec{OP})$$

$\triangle OPQ$  が『ユークリッド的平面』や『双曲的平面』上にあるときは三次元のときと同じなので問題はない。『負のユークリッド的平面』上にあるときは (D4)、 $\hat{d}(\vec{PQ})$  と  $\hat{d}(\vec{OQ})$  が  $-i \times$  (正の実数)、 $\sinh \Theta$  は  $-i \times$  (正の実数) ゆえに (6.16b) が成り立つ。

**Proposition6.2.**  $\triangle OPQ$  の面積は、 $OPQ$  が『ユークリッド的平面』上にあれば正の実数、 $OPQ$  が『双曲的平面』上にあれば  $-i \times$  (正の実数)、 $OPQ$  が『負のユークリッド的平面』上にあれば正の実数、 $OPQ$  が『退化した平面』上にあれば 0 という値を取る。

*proof.* 『ユークリッド的平面』、『双曲的平面』、『退化した平面』のときは三次元のときと同じ。『負のユークリッド的平面』の場合は『ユークリッド的平面』のときと同様に計算できるが、平面上の線

分はすべて  $-i \times (\text{正の実数})$  と表せるので面積は負の実数となる。  $\square$

**Lemma6.10.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  が『直角』のとき  $\triangle OPQ$  の面積は  $\frac{1}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ})$  になる。

*proof.*  $\triangle OPQ$  が『ユークリッド的平面』『双曲的平面』にあるときは三次元の時と同じである。『負のユークリッド的平面』のときは『ユークリッド的平面』と同様に考えて成り立つ。

このことから、三角形の面積が次のように定義できる。

**Definition6.5(面積).** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  の間の角が  $\theta$  のとき、 $\triangle OPQ$  の面積が次のように定義できる。 $(\hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0)$

(6.19)

$$\begin{cases} \frac{i}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \theta, & (OP, OQ \in A, \theta = \theta + \pi i \text{ のとき}, OP, OQ \in B, \theta = \theta \text{ のとき}) \\ -\frac{i}{2} \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \hat{d}(\overrightarrow{OQ}) \sinh \theta, & (\text{上以外のとき}) \end{cases}$$

**Corollary6.2.** 二つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  によって作られる平行四辺形の面積を  $S$  とすると、 $S^2 = T^2$

*proof.*

$$\begin{aligned} S^2 &= -\hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) \sinh^2 \theta = \hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) (1 - \cosh^2 \theta) \\ &= \hat{d}^2(\overrightarrow{OP}) \hat{d}^2(\overrightarrow{OQ}) - [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}]^2 = T^2 \end{aligned}$$

となり導ける。

**Theorem6.4 (正弦定理).**  $\triangle PQR$  ( $\hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0, \hat{d}(\overrightarrow{OP}) \neq 0$ ) において次の式が成り立つ。(但し、 $\angle P + \angle Q + \angle R = \pi i$ 、 $S$  は  $\triangle PQR$  の面積)

$$(6.20) \quad \frac{\sinh P}{\hat{d}(\overrightarrow{QR})} = \frac{\sinh Q}{\hat{d}(\overrightarrow{PR})} = \frac{\sinh R}{\hat{d}(\overrightarrow{PQ})} = \frac{2iS}{\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})}$$

*proof.*  $\triangle PQR$  を四つの場合に場合わけして考える。

- $\delta 1.] \triangle PQR$  が『ユークリッド的平面』にある
- $\delta 2.] \triangle PQR$  が『双曲的平面』にある
- $\delta 3.] \triangle PQR$  は『負のユークリッド的平面』にある
- $\delta 4.] \triangle PQR$  は『退化した平面』にある

このうち  $\delta 3.$  以外の場合は三次元の時と同じだから、 $\delta 3.$  のときを示す。 $\angle P = \theta i, \angle Q = \varphi i, \angle R = \phi i$  と仮定する。 $(\theta, \varphi, \phi \text{ は正の実数})$  このとき、

$$\begin{aligned} 2S &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \sinh(\theta i) \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh(\varphi i) \\ &= -i \hat{d}(\overrightarrow{PR}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \sinh(\phi i) \end{aligned}$$

が成り立ち、各辺を  $\hat{d}(\overrightarrow{PQ}) \hat{d}(\overrightarrow{QR}) \hat{d}(\overrightarrow{PR})$  で割ると (6.20) が得られる。

## References

- [1] K.Sano and K.Okubo, *The notion of the hyperbolic angle in the indefinite metric space* Proceedings of the 31st Symposium on Finsler Geometry (1996 Chiba), pp.48–51.
- [2] —, *Three dimensional hyperbolic geometry*, Proceedings of the 32nd Symposium on Finsler Geometry (1997 Ise), pp.64–67.
- [3] —, *Four dimensional indefinite metric geometry*, Proceedings of the 33rd Symposium on Finsler Geometry (1998 Lake Yamanaka), pp.64–67