

### 3 数学

#### 数学的に考える資質・能力の育成に向けて ～3つの視点から授業をデザインする～

山下 亮

##### 本論の要旨

新学習指導要領では、算数科・数学科において育成を目指す資質・能力を「知識及び技能」、「思考力、判断力、表現力等」、「学びに向かう力、人間性等」の三つの柱に沿って明確化された。これを受け、中学校数学科の目標も、これらの三つの柱に基づいて示されるとともに、数学的に考える資質・能力全体を、数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して育成することを目指すことが示されている。

このことを受け、本研究では数学的に考える資質・能力を育むための具体策として、どのような方法が効果的であるかを考え、以下の3点に重点を置いて、実践を試みた。

- ① 本校の総合学習「BIWAKO TIME」における探究的学習活動のプロセスを取り入れること。
- ② 生徒の「気づき」を促す課題を設定すること。
- ③ その単元のねらいに迫る発問を工夫すること。

上記の3点を意識した授業を実践することで、数学的な見方・考え方を働かせる数学的活動を生み出し、結果として数学的に考える資質・能力を育成することを強調した。

**キーワード** 数学的に考える資質・能力、探究的学習活動、総合学習、課題設定、発問

#### 1. 研究主題によせて

##### (1) はじめに

新学習指導要領では、数学科の目標を、『数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を「知識及び技能」、「思考力、判断力、表現力等」、「学びに向かう力、人間性等」の三つの柱に沿って育成していくこと』として明確化された。この「数学的な見方・考え方」については、事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えることとされており、具体的には数学の学習において、どのような視点で物事を捉え、どのような考え方で思考をしていくのかという、物事の特徴や本質を捉える視点や、思考の進め方や方向性を意味しており、数学的に考える資質・能力の三つの柱である「知識及び技能」、「思考力、判断力、表現力等」及び「学びに向かう力、人間性等」のすべてにおいて働かせるものと考えられる。

ここでいう数学的活動というのは、事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行することと定義づけされており、この数学的活動を通して「数学的な見方・考え方」を育成していくわけである。また、これら一連の学習過程は数学の世界の中だ

けでなく、現実の日常生活の場面においても働かせることが重要である。（図1参照）

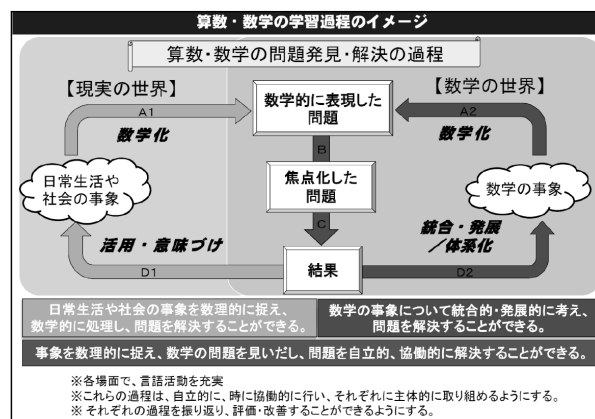


図1 算数・数学の学習イメージ

##### (2) これまでの研究の経緯

昨年度までの研究では、この新学習指導要領の目標を受け、この数学的に考える資質・能力を育成するための「数学的活動」を充実させることに焦点をあてて取り組んできた。なお、数学科において育成を目指す資質・能力については、いろいろな捉え方があると思うが、中央教育審議会答申にあるものを参考にしながら、これまで実践を重ねてきた。（図2参照）

知識・技能	思考力・判断力・表現力等	学びに向かう力・人間性等
<ul style="list-style-type: none"> <li>数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解</li> <li>事象を数値化したとき、数値的に解釈したり、表現・処理したりする技能</li> <li>数学的な問題解決に必要な知識</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>日常の事象を数理的に捉え、数学を活用して論理的に考察する力</li> <li>既習の内容を基にして、数量や図形などの性質を見いだし、統合的・発展的に考察する力</li> <li>数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>数学的に考えることによる、数学的な処理のよさ、数学の有用性などを実感し、様々な事象の考察や問題解決に数学を活用する態度</li> <li>問題解決などにおいて、粘り強く考え、その過程を振り返り、考察を深めたり評価・改善したりする態度</li> <li>多様な考えを認め、よりよく問題解決する態度</li> </ul>

図2 数学科において育成を目指す資質・能力の整理（中央教育審議会答申より）

事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行することを達成するには、本校の総合的な学習の時間である「BIWAKO TIME」（以下BT）で取り入れている探究的学習活動のプロセス（図3参照）が有効であると考え、まずは数学科の授業においてこのプロセスを取り入れ、実践を重ねてきた。そして昨年度は、この探究的学習活動のプロセスの中でも、数学の事象について統合的、発展的に考え、問題を解決させる「数学的な見方・考え方」を働かせるためには、「課題の設定」がもっとも重要であると考え、研究に取り組んだ。具体的には、課題に帰納的な思考過程を仕組むことで、その過程の中で起こる「気づき」が統合的、発展的な思考につながり、結果として「数学的な見方・考え方」を働かせるのではないかと仮説を立て、そのためのポイント（図4参照）を設定して実践した。

#### 本校BTにおける探究的学習活動のプロセス

- |         |         |
|---------|---------|
| A 課題の設定 | B 資料収集  |
| C 整理と分析 | D 発表と交流 |
| E まとめ   | F 新たな課題 |

図3 探究的学習活動のプロセス

#### 生徒の「気づき」を促すための探究的学習活動を柱とした授業構成のポイント

課題設定に関して

- ・ 解法または答が複数ある。
- ・ 具体数から考えることができる。
- ・ 具体数から規則性や性質を予想でき、最終的に一般化できる。

図4 授業構成のポイント

#### (3) 本年度の研究の方向性

昨年度までの成果として、課題設定において具体数や具体例から考えさせる場面をできる限り設定することで帰納的に考えさせ、規則性や共通点や相違

点などに気づかせ、一般化していくことが、統合的、発展的思考につながることで生徒のアンケート調査より実証できた。このことから、数学科の資質・能力を育成する土台には、生徒自身から生まれる問いや疑問などから授業を展開させていくことが重要であることが実感できた。ただ、探究的な活動は、その特性ゆえに生徒の思考が自由に拡散してしまい、最終的にねらいとする部分に迫るまでに時間を要したり、教師の思う方向性と異なる方向に進んでしまいかねないという側面もある。そのような場合、体系的な内容を学習していく教科の特性上、どうしても既成事実を詰め込んでしまう形となり、そのような場合は探究という視点から見ると生徒の主体性はやや弱くなるのではないかと感じた。そこで、今年度は課題設定と同時に「発問」を工夫することで探究的学習活動の場面を取り入れつつ、その中で広がった思考を自然な流れの中でこちらの意図するねらいへとつなげられるのではないかと考えた。（図5参照）

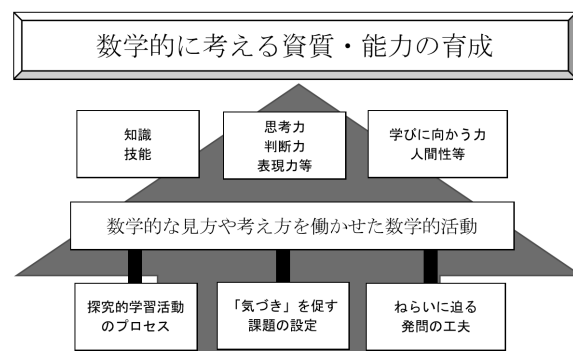


図5 本研究のイメージ

#### (4) 研究仮説

探究的学習活動のプロセスにおいて、以下のポイントを意識した発問を取り入れることで、焦点を絞った探究的学習活動となり、数学的に考える資質・能力のさらなる育成につながるのではないかと考えた。

#### 単元のねらいに迫るための数学科における「発問」のポイント

- ① どのような場合でもいえるのか問う。
- ② 一般化できるか問う。
- ③ 共通点や相違点がないか問う。

#### 2. 実践事例（円周角の定理：第3学年）

##### (1) 数学的に考える資質・能力の育成に関わって

円周角の定理の証明については、あらかじめ3つのパターン（図6参照）があることをまず示し、証

明を進めて行くことが多いのではないかと思います。しかし、それでは大前提として3パターンを先に示してしまうこととなり、生徒の多様な思考が生まれてこない。したがって、数学的に考える資質や能力を育成するという点においては十分ではないと考える。そこで本授業では、「証明の意味」、「証明の方法」、「証明の内容」について、数学的な見方や考え方を働かせながら探究しつつ、疑問や問いの解決過程を通して3つのパターンが必要であることを生徒自身に導かせることで、数学的な資質や能力の向上に努めさせたい。なお、この単元については3時間の計画で授業を実施した。概要について、略案を以下に示す。

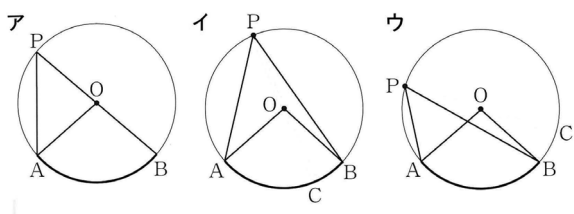


図 6 円周角の定理の証明の際の3つのパターン

第1時

	学習内容・活動	○指導 ◆評価 ★主体的な課題を見いだす方策
導入	1. 円周角について理解する。 2. 本時の目標を確認する。 <div> <b>本時の目標</b>            円周角と中心角の大きさの関係をみつけよう！         </div>	
展開	3. 円周角と中心角の大きさを実際に測り、気づいたことをまとめる。 ・「円周角の大きさは中心角の大きさの半分である」 ・「円周角の大きさはすべて同じである。」 4. 「円周角の大きさは中心角の大きさの半分であることを証明するための具体的な方法について考える。	○ワークシートを利用する。 ◆規準①(ワークシートへの記入内容)【知識・技能】 ★証明の意味を考えさせる。 ★どのような場面があり得るのかを考えさ

	5. 4の活動で出てきたパターンについて順番に証明する。	せる。 ◆規準②(ワークシートへの記入内容)【主体的に学習に取り組む態度】 ○出てきたパターンには数字を付け、順番に証明をさせる。 ◆規準③(取り組む姿勢)【思考力・判断力・表現力等】
まとめ	6. 本時をまとめる。	○書けなかった部分については、次回までの課題とする。

第2時

	学習内容・活動	○指導 ◆評価 ★主体的な課題を見いだす方策
導入	1. 前回の学習をふり返る。 2. 本時の目標を確認す <div> <b>本時の目標</b>            各パターンの証明について、しっかり理解しよう！         </div>	
展開	3. 前時で出てきたパターン(図7参照)についての証明を確認する。	○①～④のパターンについて生徒に発表させながら確認する。 ◆規準①(ワークシートへの記入内容)【知識・技能】

ま と め	4. 本時をまとめる。	○次回は⑤のパ ターンの証明 を確認するこ とを伝える。
-------------	-------------	---------------------------------------

### 第3時

	学習内容・活動	○指導 ◆評価 ★主体的な課題を 見いだす方策
導 入	1. 前回の学習をふり返 る。  2. 本時の目標を確認す る。  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <b>本時の目標</b>            各パターンの証明をふり返ろう！         </div>	○前時で確認した ①～④のパター ンの証明の記述 内容については ICTを利用して あらかじめスク リーンに映して おく。
展 開	2. ⑤のパターンについて の証明を確認する。  3. これまでの各パター ンの証明を振り返る。	○生徒に発表さ せながら確認 する。  ◆ <b>規準①(ワーク シートへの記入 内容)【知識・ 技能】</b>  ★各証明の共通 点と相違点に 注目をさせな がら、今回の 証明に必要な 部分や解法の ポイントをお さえる。
ま と め	4. 本時をまとめる。	○「円周角の定 理」をまとめ る。

#### (2) 授業の概要および様子

第1時では、実際に1つの円の中に同じ弧に対する円周角と中心角を描かせ、大きさを測らせた。そうすると、円周角の大きさは中心角の大きさの半分になっていることが見えてきた。その後、「では、

どのようなときにもこのことはいえるのか？」と生徒に聞いたところ、1人の生徒が「具体的な数値では十分な証明とはならない」と発言したので、「ではどうしたらよいか？」と尋ねた。すると、「文字を使うなどして、一般的に証明ができればよい」と言うので、実際に証明に利用するための図を全員にかせてみた。そうすると、大半の生徒が図6のイの図をかいていた。そこで、「この図だけで本当によいのか？」と発問したところ、円周上の点の取り方によって、図7にあるような①～⑤の5つのパターンが生徒達から出てきた。

第2時および第3時の前半では、第1時で出てきた5つのパターンの証明を①のパターンから順番に実際にかかせた。

第3時の後半では、5つの証明をもう一度振り返ることとした。振り返りでは、まず「5つの証明の内容を見て気づくことはないか？」という発問から、②～④の証明の記述内容は全く同じであるので、これらは1つのパターンとしてまとめてよいということを確認し、結果①、②～④、⑤の3つのパターンについて証明すればよいということをおさえた。また最後に、ワークシートを利用して、一つは、「図」について、もう一つは「記述の内容」について、それぞれ共通点と相違点を考えさせた。

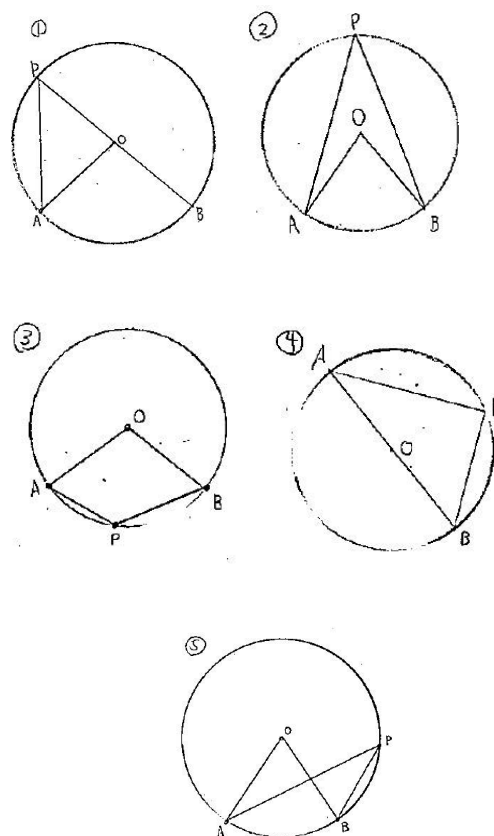


図7 クラスで出てきた5つのパターン

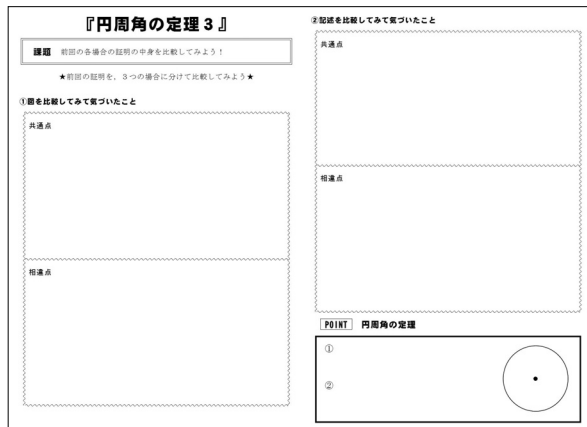


図 8 第 3 時で利用したワークシート

### (3) 実践を通して

この授業を通して、第 1 時において「この図だけで本当によいのか？」という発問を 1 つ目の中心発問とした。そのための準備活動として、生徒に証明するための図を取らせてかかせてみた。円周角という図 6 のイの図が大半の生徒の意識の中に出てくるだろうということは予想がついていたので、まずはその予想をひっくり返すことから入れば、生徒の興味や関心だけでなく、数学の本質に迫ることができるのではないかと考えた。生徒は最初、この発言の意図が分からない様子もあったが、その結果として、図にはいろいろなパターンが考えられることを試行錯誤させるきっかけをつくることができた。2 つ目の中心発問は、「5 つの証明の内容を見て気づくことはないか？」とした。時間はかかるが、生徒の多様な考えを生かしたいという部分もあり、この発問のために 5 つのパターンすべての証明を実際にかかせた。そして最終的に②～④については、記述内容がまったく同じであることをかいた証明から気づく生徒が多く（図 9, 10 参照）、実際にすべてのパターンをかかせることは重要であることを実感した。以上のことから、探究的学習活動を仕組み、生徒の多様な考えを生かしつつ、根拠をもとに 3 パターンの証明が必要であることを自然な流れでおさえることができたのではないかと考える。単元の最後には、証明の 3 つのパターンの「図」や「記述の内容」を比較させた。なぜこのような活動を取り入れたかというと、⑤のパターンの証明は 3 つのパターンの中で最も難しく、自力でかくことができない生徒も多いだろうと予想したからである。そこで、3 つの異なるパターンの中の共通点や相違点にも目を向けさせた。すると、⑤のパターンと②～④のパターンと比べたときに、「補助線を点 O と点 P にひいていること」、「 $\triangle OAP$  と  $\triangle OBP$  で外角の性質を利用していること」が共通点として見えてきた。このこと

で、⑤の証明が自力で困難な生徒へのヒントにつながった。（図 11, 12 参照）

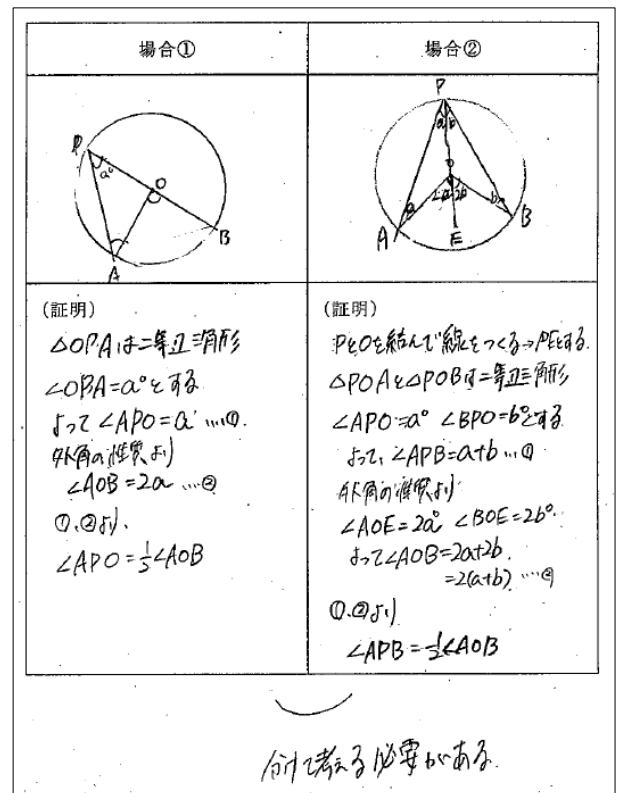


図 9 生徒のワークシートより（証明の様子 1）

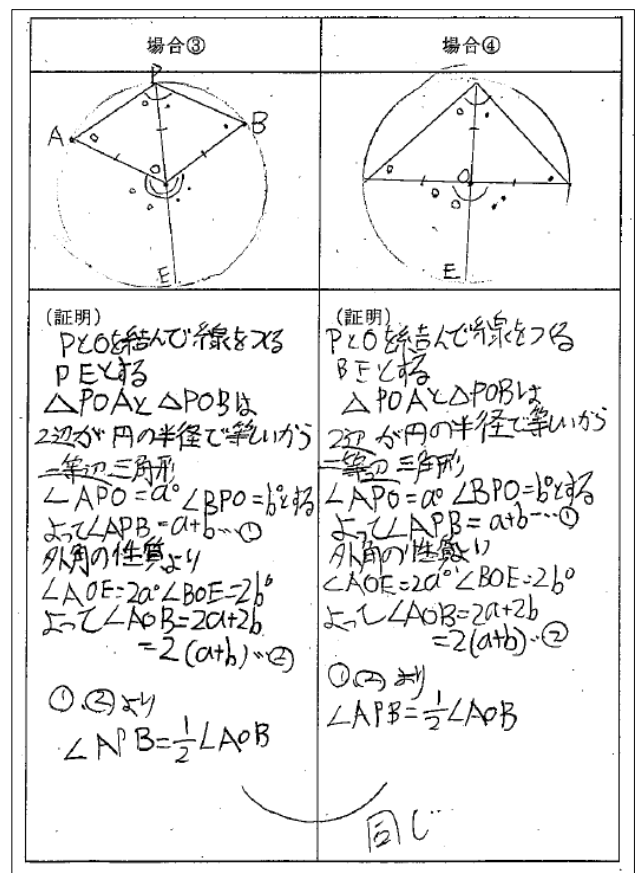


図 10 生徒のワークシートより（証明の様子 2）



### 『円周角の定理 3』

**課題** 前回の各場合の証明の中身を比較してみよう！

★前回の証明を、3つの場合に分けて比較してみよう★

①図を比較してみて気づいたこと

### 共通点

- ・  $O$  を  $\Gamma$  の直径で結んでいる。(円の直径)
- ・  $\angle C$  の数値が  $1$  つか  $2$  つかで証明している。
- ・ 三角形の外角の性質を利用している。
- ・  $\triangle APO$  は利用されている。
- ・  $\triangle PBO$  或. (ii) (iii) で使われている。
- ・ 二等辺三角形が必ずできる。

相違点

- (ii)は足しているが、(iii)は引いている。(i)は1つの角のみ  
 $\bullet \bullet + \circ \circ \times \bullet \bullet \circ$        $\circ \circ - \bullet \bullet \times \bullet \circ - \bullet$        $\bullet \bullet \times \bullet \bullet$
- ・三角形の位置を違う（三角形の組み合わせ）  
 (i)は1つ (ii)はくっつけている (iii)はくっついていない

図 11 生徒のワークシートより (図の比較)

### ②記述を比較してみて気づいたこと

**共通点**

- ・三角形の外角の性質を利用している。
- ・二等辺三角形の底角を利用している。
- ・ $\triangle APO$ が利用されている。

相違点

- (i)は足しているが、(ii)は引いている。(i)の1ヶ月前が  
説明の長さが必要なる(ii)と(iii)(iii)  
1ヶ月前と使って証明している(i)と2ヶ月前も使って  
証明している(ii)(iii)

図 12 生徒のワークシートより（記述の比較）

### 3. まとめ

本年度の研究では、発問に重点を置いた研究に取り組んだ。ただ、実践する中で感じたことは、よい発問をするためには、よい課題の設定が必要であり、逆もまたその通りということである。どれだけ

素晴らしい課題があっても、その教師の発問次第で授業の展開はいくらでも変わるということである。よって、この2つは切り離して考えることはできないものであり、1時間の授業の中で教師はその時間のねらいに迫ることができる発問を確実に準備しておかなければならないということである。その発問については、先に述べた3つのポイントを意識した発問を準備することで、生徒の数学的に考える資質・能力の向上につながるというのが今回の研究で見えてきた。

これまでの研究では、数学的な資質・能力を育成するための授業づくりについて、いろいろな視点から研究を進めてきた。次なる研究の方向として、「指導と評価の一体化」に視点を当ててみたい。学習指導要領が改訂されることで評価の観点も「関心・意欲・態度」、「知識・理解」、「技能」「数学的な見方・考え方」の4つから、「知識・技能」、「思考力・判断力・表現力等」「主体的に学習に取り組む態度」の3つとなり、いかに生徒の学びを見取るのが重要となる。これまで研究を進めてきた授業デザインを受け、この3観点の評価に落とし込んでいくための具体的な評価方法（パフォーマンス課題、ルーブリック等）について研究を進めていければと思う。

#### 4. 引用·参考文献

- ・水谷 尚人「中学校学習指導要領数学科の改訂のポイント」
- ・渡邊 慶子，篠原 雅史，山下 亮，上野 隼，高橋 利彰「算数・数学科における探究的な活動を促す教材の開発研究－『二次方程式の解』の研究を事例として－」，第63回近畿数学教育学会
- ・山下 亮「数学科における探究的な活動を促す授業展開の工夫」  
『滋賀大学教育学部附属中学校研究紀要』61
- ・山下 亮「数学科における探究的な学習活動の実践－『対話的な学び』を深めるために－」，  
『滋賀大学教育学部附属中学校研究紀要』60
- ・鬼澤 美晴「数学教育 2019 年 9 月号」