確率への招待　15回目

確率変数の例（正規分布）
確率論の応用

１．確率変数の例（前回の続き）

①二項分布Ｂ（ｎ，ｐ）（復習）

１回の試行での成功確率がｐのものを、ｎ回独立に行ったときにX回成功する確率。

例）サイコロをn回振ったときに1の目が出る回数は Ｂ（n, 1/6）。

視聴率10%のテレビ番組について、500世帯で視聴率調査を行ったときにその番組を見ていた世帯数 Ｂ（500, 0.1）。

二項分布Ｂ（ｎ，ｐ）の平均はnp

分散はnp（１－ｐ）＝npq （ただしq＝1－ｐ）

標準偏差$\sqrt{npq}$

最頻値 （ｎ＋１）ｐ以下の最大の整数

例）サイコロを１万回振ったときに1の目が出る回数

平均 10,000×1/6≒1667回

分散 10,000×1/6×5/6＝50000/36≒1389

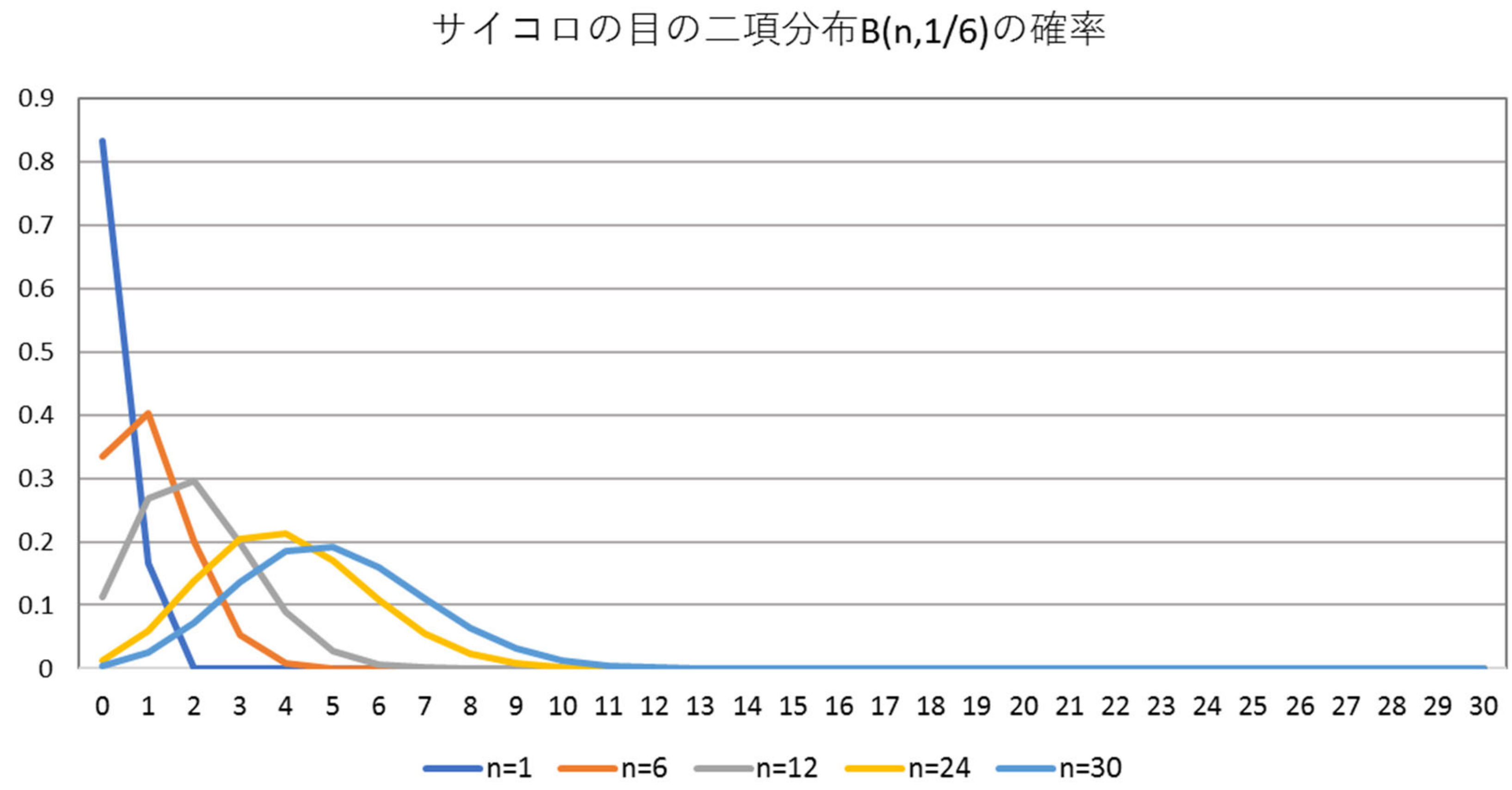
標準偏差 $\sqrt{\frac{50000}{36}}$≒37

二項分布の確率はエクセルにも組み込まれている。

=BINOM.DIST(r,n,p,FALSE)

最後の引数は、TRUEを指定すると累積分布P（X≦r）

FALSEを指定すると確率P（X＝r）



②連続型の確率変数の期待値、分散、標準偏差

連続型の確率変数についても、期待値や分散、標準偏差を次のように定義する。

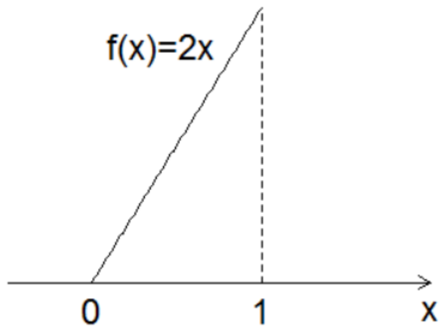
$$期待値 E(X)=m=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$$

$$分散 V(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2 f(x)dx$$

$$標準偏差 \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

例）f(x)＝2x （0≦x≦1）を確率密度関数とする確率変数

$$E(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$



$$V(X)=\int_0^1 (x-m)^2 f(x)dx=\int_0^1 (x-\frac{2}{3})^2\cdot 2xdx$$

$$=\int_0^1 2(x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{9}x)dx=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{9}x^3+\frac{2}{9}x^2\right]_0^1=\frac{1}{18}$$

②正規分布

天下り的だが、、、

mを実数、σを正の実数とするとき、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

は確率密度関数となる（$\exp(x) = e^x$）。

この確率分布を、正規分布N（m, σ^2）で表す。

正規分布については、以下のことが知られている。

（証明は解析学の知識を要するので、ここでは省略）

X～N（m,σ^2）であれば、

・E（X）＝m、V（X）＝σ^2

・一次変換Z＝aX＋bとすると、Zも正規分布となり、

Z～N（am＋b, $a^2\sigma^2$）

とくに、$Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$とすると、Z～$N(0,1)$ （標準正規分布）

さらに証明抜きでお話を続ける。

・二項分布の正規分布による近似

二項分布B(n, p)は、nが十分大きいとき、
正規分布N(np, npq)に近づく。

・正規分布の再生性

X, Yが独立な正規分布で$X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$、$Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$
ならば、X＋Yも正規分布で$X+Y \sim N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

・中心極限定理

X_1、X_2、・・・、X_n が独立で同一の分布に従う確率変数とし、その期待値m、分散σ^2が存在するとする。
このとき、(X_1、X_2、・・・、X_n)の平均$(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n$は、平均m、分散σ^2/nの正規分布に近づく。
元の分布が何であっても正規分布に近づくのがすごいところ

統計の教科書には、ほぼ必ず、正規分布の表がついている。
正規分布で、ｍ－σ≦X≦ｍ＋σとなる確率は約68．3％
ｍ－２σ≦X≦ｍ＋２σとなる確率は約95．４％
ｍ－1.96σ≦X≦ｍ＋1.96σとなる確率は約95．０％

これを使うと、例えば次のようなことができる。
例）サイコロを１万回振るとき、１の目は何回くらいでるか。
答え）これは二項分布B(10000, 1/6)に従い、
平均は10000/6、標準偏差は$\sqrt{50000/36} = 50\sqrt{5}/3$。
この分布を正規分布で近似すると、
m−1.96σ≒1594、ｍ＋1.96σ≒1740なので、
１の目が出る回数は、確率95％で1594回以上1740回以下。

このような計算について、詳しくは、後期の「統計学要論」などで扱う予定。

２．確率論の応用

　確率論は、データサイエンスだけでなく、経済学でも不可欠。

ここでは、経済学への確率論の応用として、

①ホールの恒常所得仮説の検定と一般化モーメント法（GMM）

②株価バブルに関するシラーのボラティリティテスト

③ポートフォリオ選択理論

④確率微分方程式と伊藤の公式とブラック-ショールズの公式

を（厳密性は無視して）紹介する。

完全に理解することは求めない。
ノートも取らなくていいです。
確率論がこのように応用されるという雰囲気をつかんでほしい。

①ホールの恒常所得仮説の検定

最初に経済学の歴史をおさらい

・ケインズ革命：財政政策と金融政策の組み合わせにより不況はなくすことができる（「雇用・利子および貨幣の一般理論」（1936））

・しかし、1970年代に「合理的期待仮説」が世を席捲。
　人々は将来のことをきちんと予測して行動する（将来には不確実性があるけれど、確率をこめて予測）
　→したがって、政府が景気刺激のために減税しても「その政府赤字を埋めるために将来増税するだろう」と予測して、消費を増やさない。
　　マネーサプライを増やしても、それで景気はよくならず、物価が上がるだけ。
　当初は「人間がそこまで将来のことを予測できるわけがない」と反発もあったが、今や、経済学のスタンダード。
（天気予報で「降水確率80％」と言われれば傘を持っていく）

合理的期待をどうやってデータで実証するか？

・合理的期待が正しければ、例えば金融政策では、経済は「予期されたマネーサプライの増加」には影響を受けず、「予期されない（サプライズの）マネーサプライの増加」にのみ影響を受ける。

→そこで、マネーサプライを「予期された部分」と「予期されなかった部分」とに分解し、それぞれの影響を分析することが考えられた。

→「予期された部分」は観測不可能！

回帰分析で「予期されたマネーサプライ」を予測。

（統計ソフトで回帰分析をすると「有意性の低い変数を落としていく」という機能がある）

→しかし、一般的に言って、分析結果は思わしくなかった。

合理的期待仮説を家計消費に適用すると、
「家計は将来の所得金額を合理的に予測し、恒常的に安定して得ることができる所得（恒常所得）を基に、それを毎年均等に按分して消費する」ことになる。
（恒常所得仮説）

→これをどうやってデータで実証するか？
将来所得に関する家計の予測は観測不可能。
・回帰分析で求める？
・アンケート調査で聞く?

アメリカの経済学者ホールが、ここで発想の大転換。

・「恒常所得を基に消費を毎年均等に按分する」のであれば、t年の消費をC_tで表すと、基本的に$C_{t+1}＝C_t$。

・ただし、t＋1年になってみると景気がいきなり悪くなって恒常所得が減り、消費C_{t+1}を減らすかも知れない。しかしそのことはt年には分かっていないことなので、条件付期待値で表すと$E[C_{t+1}－C_t \mid t年の情報]＝0$。とくに、共分散$Cov(C_{t+1}－C_t, t年の情報)＝0$となることを、「t年の消費」「t年の株価」etc. を用いて分析。

– ホール以前は「C_{t+1}を予測しよう」ということが目標だったが、逆に「予測できない」ことを示せばよい

– 複雑な方程式を解いて実際にC_{t+1}を求めなくても、$E[C_{t+1}－C_t]＝0$という条件（効用最大化のための1次条件）を検定すればよい。

・ホールのおかげで、合理的期待仮説を基礎としたマクロ経済学が大きな進歩。

・また、ホールのアイデア

「Cov（C_{t+1}－C_t, t年の情報）＝0を検定すればよい」

を発展させて、アメリカの経済学者ハンセンは「一般化モーメント法（GMM）」という計量経済学の推定方法を開発し、ノーベル経済学賞を受賞。

②株価バブルとシラーテスト

なぜ株を買うのか？

→配当がつくから（株主優待があるから）

将来値上がりしたときに売ればもうかるから

株価のうち、将来の配当（を金利で割り引いて現在の価値に直したもの）から決まる部分をファンダメンタルズ、それ以外の部分をバブルという。

株価 P_t

ファンダメンタルズ $F_t = E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{t+i}}{(1+r)^i}\right]$

配当 d_t

バブルの有無をどうやって検定すればいいか？

・F_tは予測を含んでいる式なので、外からは観測不可。
・事後的に（d_{t+i}が分かった時点で昔を振り返って）
F'_tを計算して（F_tの差分F'_tに関する方程式からF_tを計算して）$P_t \neq F_t$を示してもダメ。
将来の配当をどう予測しているかは観測不可能。
「もっと配当が増えると思っていた」と言われると反論できない。

・でも、事後的に分かったF_tの実現値と株価P_tとの差
$u_t = F_t - P_t$は
「将来の配当d_{t+i}の予測が外れてしまったため」。
⇒ホールの議論と同様に考えると、
「u_tは時点tでは予測できない→$\mathrm{Cov}(u_t, P_t) = 0$」

$F_t = P_t + u_t$の両辺の分散をとると、

$$\mathrm{Var}(F_t) = \mathrm{Var}(P_t) + 2\mathrm{Cov}(P_t, u_t) + \mathrm{Var}(u_t)$$
$$= \mathrm{Var}(P_t) + \mathrm{Var}(u_t) \geqq \mathrm{Var}(P_t)$$

F_t、P_tはともに観測可能な変数なので、$\mathrm{Var}(F_t)$や$\mathrm{Var}(P_t)$は計算でき、これが上の不等式を満たしているかはチェックできる。

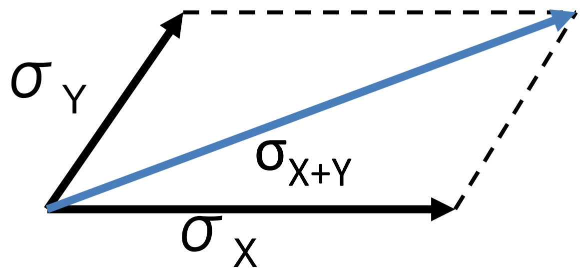
→実際のデータで計算するとこれは全然成り立たない（株価Ptの変動（ボラティィリティ）はとても大きい）

→「株価がファンダメンタルズで決まっている」という仮定はマチガイ。

これを考えたアメリカの経済学者シラーは2013年にノーベル経済学賞を受賞。

③ポートフォリオ・セレクション

- 株式市場に、A社の株、B社の株、・・・があったとき、どれを買うとよいか？
- それぞれの会社の株を買った時の利回りをR_i（i＝1,2,･･･,n）とするとき、R_iが一番大きいものを買えばよい！
  ←20世紀前半まではそう考えられてきた。
- しかし、R_iは実は確率変数。利回りの期待値が高いものは、通常、リスク（利回りの標準偏差）も高い。
  （ハイリスクハイリターン）
  複数の株を組み合わせて買うと、リスク（標準偏差）が減る。



相関係数が1でない限り、$\sigma_{X+Y} < \sigma_X + \sigma_Y$

利回りR_1の株式をw_1%、R_2の株式をw_2%、…買う組み合わせ（ポートフォリオ）を考えると、

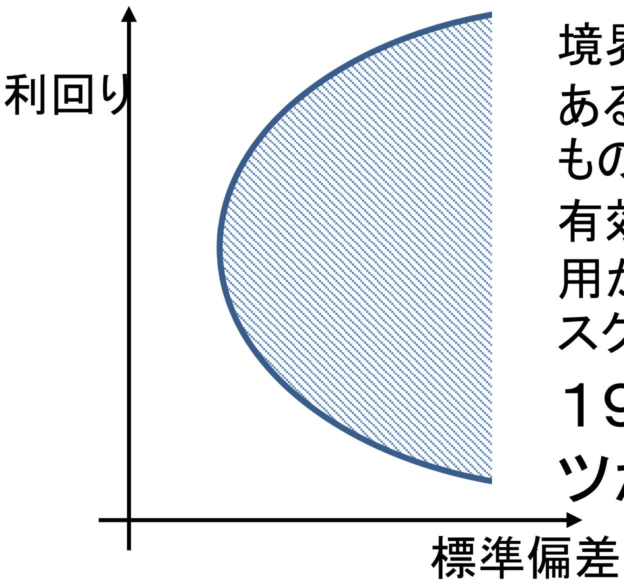
期待利回り$E[w_1R_1+w_2R_2+\cdots]=w_1\mu_1+w_2\mu_2+\cdots$

分散$V[w_1R_1+w_2R_2+\cdots]=\sum\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j w_i w_j$

ただし、μ_iはR_iの期待値、σ_iはR_iの標準偏差、

ρ_{ij}はR_iとR_jの相関係数

$w_1, w_2, \cdots, w_n$をいろいろ変えたときに、ポートフォリオの期待利回りと標準偏差の取り得る値の範囲をグラフに描くと、



境界線を「有効フロンティア」という。

ある利回りを達成する中でリスク（標準偏差）が最小になるもの。

有効フロンティア上の点を選べば、もっとも効率的な資産運用ができる。（有効フロンティア上のどの点を選ぶかは、リスク選好度により異なる）

１９５２年にアメリカの経済学者マーコヴィッツが開発（後にノーベル経済学賞を受賞）

④確率微分方程式と伊藤の公式とブラック–ショールズの公式

・金融市場の発達によって、株式や債券のような旧来からの金融商品に加えて、それらを基にした金融派生証券(オプション)が登場。

・コールオプション：ある証券をT年後に行使価格K円で買う権利

例えば「１年後にA社の株を１万円で買う権利」は、

–もし１年後にA社の株が２万円になっていても１万円で買える

→差し引き1万円の得

–もし１年後にA社の株が５千円に値下がりしていたら、オプションはあくまでも「買う権利」なので、わざわざ１万円で買う必要はない→その時点ではオプションの価格はゼロ

（負担は「買う権利」を購入した価格のみ）

・将来の株価は変動する→確率変数なのだが、確率を含んだ微分方程式を考え、それを解くことによってオプションの価格が数学的に計算できるようになった（ブラックショールズの公式）

確率過程：時間とともに変化する確率変数
例えば、株価、為替レート、水面に浮かぶ粒子の動き　など

確率過程で最も基本的なのが「ランダムウォーク」。
$z_0 = 0$、 $z_t = z_{t-1} + u_t$ （$t \geqq 1$）
ただし、u_tは確率0.5で１、確率0.5で－１の値をとる確率変数。
$t \neq s$なら、u_tとu_sは独立

$z_t = u_1 + u_2 + \cdots + u_t$とあらわされるので、平均と分散は
$E[z_t] = E[u_1 + u_2 + \cdots + u_t] = E[u_1] + \cdots + E[u_t] = 0$
$V[z_t] = V[u_1 + u_2 + \cdots + u_t] = V[u_1] + \cdots + V[u_t] = t$ （独立だから）

これを連続時間バージョンに拡張すると、
z_tは、２項分布（もどき）の多数の和なので正規分布になり、
その平均は0、分散はt
よって、標準正規分布に従う確率変数をεと書くことにすると
ある時点 t のみをみれば$z_t = \sqrt{t} \cdot \varepsilon$ とあらわされる。

$(\Delta x)^2$の項までテイラー展開すると、

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t$$

ただし、$(\Delta x)^2 = a^2(\Delta t)^2 + 2ab\Delta t\Delta z + b^2(\Delta z)^2$

$$= a^2(\Delta t)^2 + 2ab\varepsilon(\Delta t)^{1.5} + b^2\varepsilon^2\Delta t$$

前の2つの項はΔtより次数が高いので、0に収束するが、
最後の項はΔtの次数なので、テイラー展開のときに残ってしまう。

結局、確率微分の世界では、

$$\Delta G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\varepsilon^2\right)\Delta t + \frac{\partial G}{\partial x}b\Delta z$$

Δzが$\sqrt{\Delta t}$の次数だったので、2次の微分が出てきた。
これが伊藤の公式と呼ばれるもの。
日本人数学者の伊藤清氏が内閣統計局（現・総務省統計局）在職中（1942年）に理論を構築。

伊藤の公式

$$\Delta G = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \varepsilon^2 \right) \Delta t + \frac{\partial G}{\partial x} b \Delta z$$

を1970年代にオプション価格の計算に応用したのが
ブラック-ショールズの公式。

これ以降、金融工学が大きく発展し、バリバリの理科系がウォール街を席捲するようになった。
ショールズは1997年にノーベル経済学賞を受賞。