確率への招待　12回目

確率の定義と計算
中間まとめ

１．確率の定義と基本的な性質

（１）確率の定義

（高校数学風）同様に確からしい根元事象の数の比率

「同様に確からしい」というのがポイント！

例えば、２つのサイコロを同時に振るとき、

（１，２）と（２，１）を区別しないと目の出方は21とおり。

しかし、「同様に確からしい根元事象」としては

（１，２）と（２，１）は別モノ。

目の出方は6^2＝３６とおり

（現代数学風）全体集合Ｕとその部分集合に対し、

実数Ｐ（Ａ）を対応させるＰが次の性質を満たすとき、

Ｐを確率という。

- Ｐ（Ｕ）＝１
- 任意の部分集合Ａに対しＰ（Ａ）≧０
- 互いに共通部分を持たない（可算個の）A_1，A_2，…

  に対し、$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

（2）排反事象、余事象

・事象Aと事象Bとが同時には決して起こらないとき、
「AとBは排反である」という。
（対応する集合では$A \cap B = \phi$）

・事象Aに対し、Aが起こらないという事象をAの余事象という。
（対応する集合ではAの補集合）

「少なくとも１つ」という場合に余事象を使って計算するのは、覚えておくべきパターン。

（3）確率の基本的な性質

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(U) = 1, \quad P(\phi) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

とくにAとBが排反であれば、$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

２．独立な試行、反復試行

（１）独立な試行の確率

互いに独立な試行Ｓ，Ｔについて、試行Ｓで事象Ａ、
試行Ｔで事象Ｂが起こる確率はＰ（Ａ）×Ｐ（Ｂ）

（２）反復試行の確率

ある試行を１回行って事象Ａが起こる確率をpとするとき、
この独立な試行をn回行ってＡがちょうどr回起こる確率

$$ {}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r} $$

反復試行の例としてランダムウォークがある。

ランダムウォークに基づく2項モデルはファイナンス理論でよく用いられる。

３．条件付き確率、独立事象

（１）条件付き確率

事象Aが起こったときの事象Bが起こる条件付き確率

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

（記号P（B ｜ A）と書くこともある）

（２）独立事象

Ｐ（A∩B）＝Ｐ（A）Ｐ（B）であるとき、事象Aと事象Bは独立であるという。

４．ベイズの定理

（１）ベイズの定理（バージョン１）

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

（２）ベイズの定理（バージョン２）

全体集合がA_1、A_2、…、A_nに分割されているとき、

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)}$$

条件付き確率の添え字がたくさん出てくるので、P(A|B)式の記号で書いたが、もちろんP_B（A）式の記号で書いてもよい。

ベイズの定理に基づき、事前確率・事後確率を扱うベイズ統計は現代統計学の主流。

おまけ)「百発百中の砲1門は、、、、」

日露戦争・日本海海戦の東郷平八郎提督は「百発百中の砲1門は百発一中の砲100門に勝る」と訓示したが、これは正しいか。

答えは1とおりではない。いろいろ考える。

①オリンピック競技のように、1つの的に向かって射撃する場合

- 百発百中の砲1門は、1回の射撃で、必ず1発当たる。
- 百発一中の砲100門が一斉に的に向かって射撃すると、100発当たるかもしれないし、全部はずれるかもしれない。

各大砲の命中が独立試行だと考えると、

100発撃ってr発当たる確率は${}_{100}C_r(0.01)^r(0.99)^{100-r}$

例えば、全部外れる確率は$0.99^{100}=0.366...$

平均すると1発当たる（詳しくは2項分布のところでやる）

⇒平均するとどちらも1回の射撃で1発当たるが、百発一中の砲100門は、37%の確率で全部外れる。

確実性を求めるなら、百発百中の砲1門の方が優れている。

②戦争みたく、お互いが向かい合って撃ち合い、弾が当たった方は破壊されて負けであるとする。

・百発百中の砲1門は、1回の射撃で必ず1発当たり、相手を1門減らす。

・百発一中の砲100門が一斉に撃つと、約37%は全部外れるが、残り約63%で相手をやっつけて（自分たちは99門のこっているので）勝利。

⇒この場合は、百発一中の100門の方が有利と考えられる。

それでは、この②のような場合は、百発百中の砲1門は百発一中の砲何門と互角だろうか？。

【問題設定】百発百中の砲1門と、百発一中の砲n門とが向かい合って撃ち合いをする。弾が1発でも当たったら、その砲は破壊される。このようにして何回か撃ち合いをし、1門でも残った方を勝ちとする。この勝負が互角になるnはいくつか。

・まず第１回目の対戦。
百発百中の砲は1発撃って必ず当たり、相手はn-1門に減る。
百発一中の方はn発撃って各命中率が0.01だから、１発でも当たる確率１－0.99^{n}で相手を破壊して勝ち。
全部外れる（確率0.99^{n}）で第２回戦へ。

・第２回戦
百発百中の砲は1発撃って必ず当たり、相手はn-2門に減る。
百発一中の方はn-1発撃つから、確率１－0.99^{n-1}で勝ち。
確率0.99^{n-1}でまた全部外れて３回戦へ。
・・・・・・・・・・
・第n回戦
百発百中の砲は1発撃って必ず当たり、相手は全滅。
百発一中の方は1門しか残っていない。１発撃って確率0.01で引き分け。確率0.99で外れて（自軍は全滅なので）負け。

百発百中の方が勝つのは、n回戦までいって、最後も相手が外す場合。

n回戦までいって、最後も百発一中の方が外す確率は、

$$0.99^{n} \times 0.99^{n-1} \times \cdots \times 0.99 = 0.99^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

これが1/2に等しくなるnを求めればよい。

対数をとって、$\dfrac{n(n+1)}{2}\log(0.99) = \log(\dfrac{1}{2}) = -\log 2$

手計算でやるのはやや大変なので、パソコンでlog0.99とlog2を求めると、 $\dfrac{n(n+1)}{2} = 68.9\cdots$

きれいに整数では出なかったが、 n=11のとき、n(n+1)/2＝66、n=12のとき78なので、

「百発一中の方が11門以下なら負け、12門以上なら勝ち（の確率が半分以上）」

（確率の授業からは外れるが）この問題から確率的要素を外し、「百発一中の砲１門に打たれると、戦闘力が0.01低下する」として定式化したのものが、ランチェスターの法則。
「戦力は武器の性能に比例し兵力の２乗に比例する」
経営学の教科書にはときどき出てくる。

【問題の設定】
百発百中の砲と百発一中の砲が向かい合って撃ち合う。
時刻tにおいて残っている砲をそれぞれx（t）、y（t）とすると、

$$\frac{dx(t)}{dt} = -0.01y(t), \frac{dy(t)}{dt} = -x(t)$$

この連立常微分方程式を解けばよいのだが、ここでは簡単に、解の軌道を求めよう。
dtを消去して整理すると、x・dx＝0.01y・dy
積分して　x^2＝0.01y^2＋C　Cは積分定数。
これが引き分けとなるのは原点（0，0）を通る、すなわちC=0で
Y＝10x　10門で対抗できる。