確率への招待　11回目

確率⑤

様々な確率の計算

１．場合の数と確率、余事象

例題１）３個のサイコロを振るとき、

①出た目の和が１０になる確率はいくらか。

②出た目の和が偶数になる確率はいくらか。

③偶数の目が少なくとも１つ出る確率はいくらか。

答え）①和が10になる場合を書き出してみる。

確率では「サイコロは区別して考える」のだが、
区別して書き出すと場合の数が多くなって面倒なので、
「区別しない場合の数を（辞書式順序で）数え」、
「順列の数を掛け算」。

・１の目が含まれるのは、（１，３，６）、（１，４，５）。
それぞれ順列を考えると6倍　⇒１２とおり

・１の目が含まれず2の目が含まれるのは、
（２，２，６）、（２，３，５）、（２，４，４）。
このうち（２，２，６）と（２，４，４）は3倍、（２，３，５）は6倍
⇒１２とおり

・１の目、２の目が含まれず、３の目が含まれるのは、
（３，３，４）で、順列を考えると3倍⇒3とおり
・１，２，３の目が含まれないと、最低でも（４，４，４）の合計１２の目になるので、出た目の和が１０になるのはない。
以上を合計すると、和が１０になるのは１２＋１２＋３＝２７。
一方、3つのサイコロの目の出方全体は（サイコロに区別がつくと思って）6^3＝２１６だから、$\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$

②出た目の和が偶数になるのは、{３つとも偶数}か{１つが偶数で２つが奇数}のときで、これらはお互いに背反。
・{３つとも偶数}の確率を、反復試行の確率を使って求めると、

$${}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

・{１つが偶数で２つが奇数}の確率も同様に求めると、

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

合計して、$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

③「少なくとも1つは偶数の目が出る」の余事象は「すべて奇数」だから、余事象の確率を計算して1から引く。

１つのサイコロを振って奇数が出る確率は３／６＝１／２

よって、$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$

例題2）小学校の1クラス40人の中で、誕生日が同じ人が少なくとも1組いる確率はいくらか。（うるう日はないとする）
手計算は無理なので、電卓orPCを使って計算せよ。

（答え）これも「少なくとも1組」⇒余事象を使って計算する。
全員の誕生日がすべて異なる確率は、

$$1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{326}{365} = 0.1087 \cdots$$

よって、40人中、誕生日が同じ人が少なくとも1組いる確率は、1－0.109＝0.891・・ 約89％。

他の人数でも計算してみると、

10人クラスで、	11.7％
20人	41.1％
23人	50.7％
30人	70.6％
70人	99.9％

365人クラスで、あたりまえだけど100％。

例題3）大相撲の巴戦

　実力の等しいA，B，C，３人が次のように勝負する。

　最初はAとBが対戦し、勝った方が土俵に残り待っていたCと対戦する。この対戦で勝った方がまた土俵に残り待っていた人と対戦する。このようにして、２連勝した人が出た時点で、その人の優勝とする。

　１回目の対戦でAが勝ったとするとき、最終的にAが優勝する確率を求めよ

解１）最終的にAが優勝する確率をx、Bが優勝する確率をy、
Cが優勝する確率をzとおく。
２回目の対戦の結果で場合分けして考えると、

・Aが優勝するのは、２回目の対戦で勝つ（確率1/2）か、
1/2の確率で負けてしまった場合はBとおなじ立場になる。
よって、$x = 1/2 + y/2$

・Bが優勝するのは、２回目の対戦でAが負けた場合で、その時点では第２戦のCと同じ立場。
よって、$y = z/2$

・Cが優勝できるのは、２回目の対戦でAに勝った場合であって、その時点ではAと同じ立場
よって、$z = x/2$

以上の３つの連立方程式を解いて$x = 4/7$、$y=1/7$、$z=2/7$

解2)Aが優勝するのは、

- ・2回目の対戦で勝つ
- ・2回目は負け(Cの勝ち)、その後Bが勝ってAが連勝
- ・CBACBと勝ってその後Aが連勝
- ・CBACBA...CBと勝って、その後Aが連勝

なので、

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\frac{1}{2}+\cdots=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}$$

※巴戦では最初に対戦する人の優勝確率はx/2+y/2=5/14。
待っている人の優勝確率は1-5/14×2=4/14なので、
最初に対戦するほうが有利。

２．反復試行の確率

例題4）プロ野球の日本シリーズ

①プロ野球の日本シリーズでは、A，B，2つのチームが対戦し、先に4勝した方が優勝となる。
各ゲームの結果はそれぞれ独立であり、1回の対戦でAが勝つ確率をp、引き分けはないとしたとき、Aが優勝する確率を求めよ。

②クライマックスシリーズでは、やはり先に4勝した方が優勝だが、レギュラーシーズンの優勝チームにはあらかじめ1勝のアドバンテージが与えられている。両チームの力が対等の場合、アドバンテージをもらったチームはどの程度有利か。

答え）①全部書き出すのが基本だが、多少は楽をして、

・Aの４連勝となるのは、 p^4

・Aの４勝１敗となるのは、４試合目まではAの３勝１敗で最後にAが勝つので、${}_4C_3p^3(1-p)\times p=4p^4(1-p)$

・Aの４勝2敗となるのは、5試合目まではAの３勝2敗で最後にAが勝つので、${}_5C_3p^3(1-p)^2\times p=10p^4(1-p)^2$

・Aの４勝3敗となるのは、6試合目まではAの３勝3敗で最後にAが勝つので、${}_6C_3p^3(1-p)^3\times p=20p^4(1-p)^3$

これらは互いに背反なので、求める確率はこれらを合計して

$p^4(35-84p+70p^2-20p^3)$

念のため検算する。

p=0.5を代入すると、これは0.5になる。

答え）②　これも①と同様に解くと、

・Aの３連勝となるのは、　p^3

・Aの３勝１敗となるのは、３試合目まではAの２勝１敗で最後にAが勝つので、$_3C_2p^2(1-p)\times p=3p^3(1-p)$

・Aの３勝２敗となるのは、４試合目まではAの２勝２敗で最後にAが勝つので、$_4C_2p^2(1-p)^2\times p=6p^3(1-p)^2$

・Aの３勝３敗となるのは、５試合目まではAの２勝３敗で最後にAが勝つので、$_5C_2p^2(1-p)^3\times p=10p^3(1-p)^3$

これらは互いに背反なので、求める確率はこれらを合計して

$p^3(20-45p+36p^2-10p^3)$

$p=0.5$のとき、21/32＝０．６５６・・　約66％

逆に、上記の確率が0.5になるようなpをエクセルで求めると

$p=0.421$・・・　これくらいの差がないとひっくりかえせない

例題5）サイコロをn回振ったとき、１の目が偶数回出る確率を p_nとする。（なお、０回も偶数回出たと考える）
p_nはいくらになるか。

答え）n回目の目が１か１でないかで場合分けして、漸化式を立てる。

n回振ったときに1の目が偶数回出るというのは、

①（nー１）回までに1の目が偶数回出て、n回目は1ではない

②（nー１）回までに1の目が奇数回出て、n回目は1

①の確率は、p_{n-1} ×５／６

②の確率は、（１ーp_{n-1}）×１／６

よって、$p_n = \frac{5}{6} p_{n-1} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} p_{n-1} = \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{1}{6}$

これを解いて、（ただしp_1＝5/6）

$$p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

３．条件付確率

例題6）３個のサイコロを同時に振るとき、

事象A＝{すべて異なる目が出る}

事象B＝{少なくとも1つは1の目が出る} とする。

事象Bが起こったときの事象Aの条件付確率P_B（A ）を求め、AとBとが独立ではないことを示せ。

答え）P（A）＝１×5/6×4/6＝5/9

A∩B＝{1の目が1つ出て、全ての目が異なる}だから、

n（A∩B）＝（１×５×４）×３＝60

P_B（A）＝n（A∩B）／n（B）＝60／（6^3－5^3）＝60／91

P（A）≠P_B（A）だから、AとBとは独立ではない。

４．ベイズの定理

例題7）ある病原菌の検査試薬は、病原菌に感染しているのに誤って陰性と判断する確率が１％、感染していないのに誤って感染と判断する確率が２％である。
　感染率が１％の検体から１つ取り出してこの試薬で検査したところ、陽性と判断された。実際にこの検体が感染している確率はいくらか。

答え）ベイズの定理より

$$\frac{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}}{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{2}{100}}=\frac{1}{3}$$