# 確率への招待　9回目

## 確率③

独立試行、反復試行
条件付き確率、独立事象

## １．独立な試行

試行（trial）というのは、「同じ状態のもとで何度も繰り返すことができ、その結果が偶然によって決まるもの」（サイコロを振る、物理実験、など）であった。

２つの試行SとTが独立であるとは、お互いの結果が他方に全く影響を及ぼさないことをいう。

例）・「教室でサイコロを１回振る」という試行と、全く別の場所で「物理の実験をする」という試行は（たぶん）独立。

・サイコロを２回振るとき、「サイコロを１回目に振る」試行と「サイコロを２回目に振る」試行は独立

・クジを２回引くとき（いったん引いたクジは元に戻さない）、「クジを１回目にひく」試行と「クジを２回目にひく」試行とは独立ではない。
（１回目に当たりを引いてしまったら、２回目の当たる確率はその分低くなるから）

２回サイコロを振るときにそれが互いに独立であるということは、
昔の人にとってはなかなか理解できなかったこと。
cf. 講義第１回のカルダノの例

つまり、昔の人は、
「サイコロのそれぞれの目が出る確率が1/6」
＝「サイコロを6回振ると、１から6の目が１回ずつ出る」ということだと何となく思っていた。
あるいは、そこまで極端ではなくても、「サイコロを10回振っても１の目が出なかったが、次（11回目）はかなり高い確率で１の目が出るはず」と思っていた。

⇒パスカル・フェルマーの書簡では「サイコロは前回の自分の目が何であったか覚えていない」として、この旧弊から脱却。

たとえ「サイコロを10回振って１の目が全然でなかった」としても、11回目に１の目が出る確率はやっぱり1/6。

２つの独立な試行Ｓ、Ｔを行うとき、Ｓでは事象Ａが起こり、Ｔでは事象Ｂが起こるという事象をＣとすると、

Ｐ（Ｃ）＝Ｐ（Ａ）×Ｐ（Ｂ）

例）サイコロを2回振るとき、１の目が続けて2回出る確率は、

1/6×1/6＝1/36

ちなみに、１回目が１の目で、２回目が6の目の確率も、

1/6×1/6＝1/36

例）10本のクジの中に2本当たりクジがある場合、

・いったん引いたクジを元に戻すならば、１回目に引く試行と２回目に引く試行とは独立。当たる確率はどちらも2/10

・いったん引いたクジを元に戻さなければ、１回目に引く試行と2回目に引く試行とは独立ではなく、

１回目に当たりが出れば、2回目に当たりが出る確率は1/9、

１回目が外れれば、　　　2回目に当たりが出る確率は2/9

## ２．反復試行の確率

１つのサイコロを続けて何回も振るように、「同じ条件の下で同じ試行を何回か繰り返し行う」ものを反復試行という。

例）サイコロを5回振るとき、1の目がちょうど3回出る確率。

例えば1の目が1回目、3回目、5回目に出て、残りの２回目と4回目は別の数字が出る確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

1の目が出る3回を5回のうちから選ぶやり方は${}_5C_3$とおり。

そのそれぞれについて、確率は上と同じく$\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$

これらは互いに排反だから、求める確率はこれらの足し算、すなわち${}_5C_3$倍だから、 ${}_5C_3\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=10\times\frac{5^2}{6^5}=\frac{125}{3888}$

１回の試行で事象Aが起こる確率をpとする。この試行をn回繰り返し行い、各回の試行が独立であるとき、事象Aがちょうどr回起こる確率は、 $_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$

例）ランダムウォーク

数直線上にある点Pが、確率pでプラス方向に1、確率１－pでマイナス方向に１動くとき、点Pの動きをランダムウォーク（酔歩）という。

最初に原点Oから出発した点Pがn回後に数直線上のkのところにいる確率を求めよう。n回中、プラス１進んだのがr回とすると、マイナス１進んだのはn−r回で、Pの座標はr−(n−r)＝2r−n

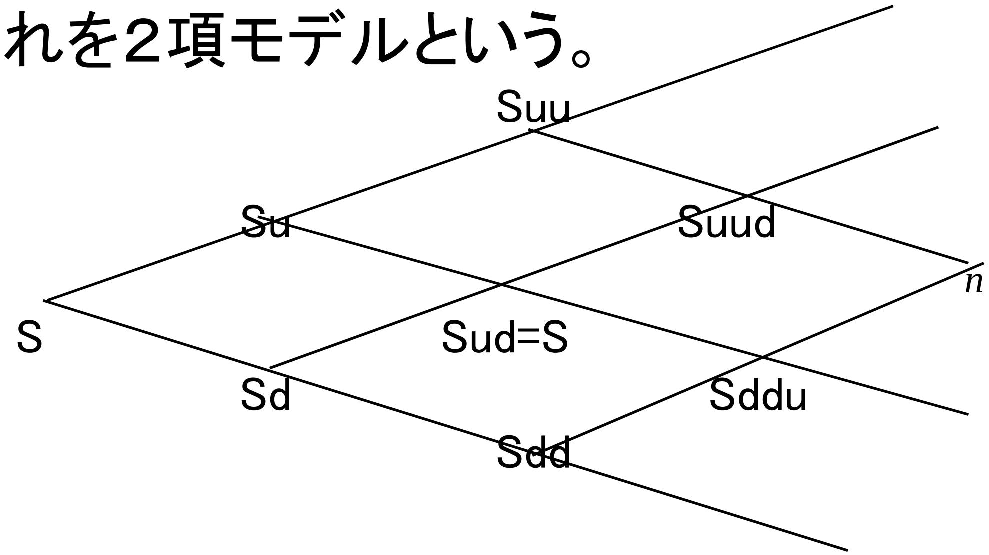
2r−n=kを解いて、r＝（n+k）/2

ただし、rは0からnの整数だから、kの取り得る値にも制限があり、k=−n,−n+2,−n+4,･･･,n−2,nの(n+1)個の整数値しかとり得ない。

よって、n回後に点Pが座標kにいる確率Pn(k)は、

$$P_n(k) = {}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r}, \text{ただし } r = \frac{n+k}{2}, k = -n, -n+2, \cdots, n$$

ランダムウォークは、金融工学でよく用いられる。
株価が1期後に確率pでd円上昇、確率1-pでd円低下すると仮定すると、t期後の株価の分布はランダムウォークで記述できる。
これを2項モデルという。




$${}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r}$$

ウルサイことをいうと、「株価はマイナスになることはない」ので、株価自体がランダムウォークに従うのではなく、株価の対数値がランダムウォークに従う(つまり、確率pで(1+d)倍、確率1-pで1/(1+d)倍)という定式化の方が一般的)

オプション（将来の時点tで、株式をある行使価格で購入／売却できる権利）の価値を2項モデルの各状態で求め、それを現在価格に割り戻すことにより、オプションの現在価値を求める。

実際には時間は離散的（t=1，2，3，...）ではなく連続的なのだが、2項モデルで時間の間隔を小さくしていった極限として連続時間モデルが導出できる。

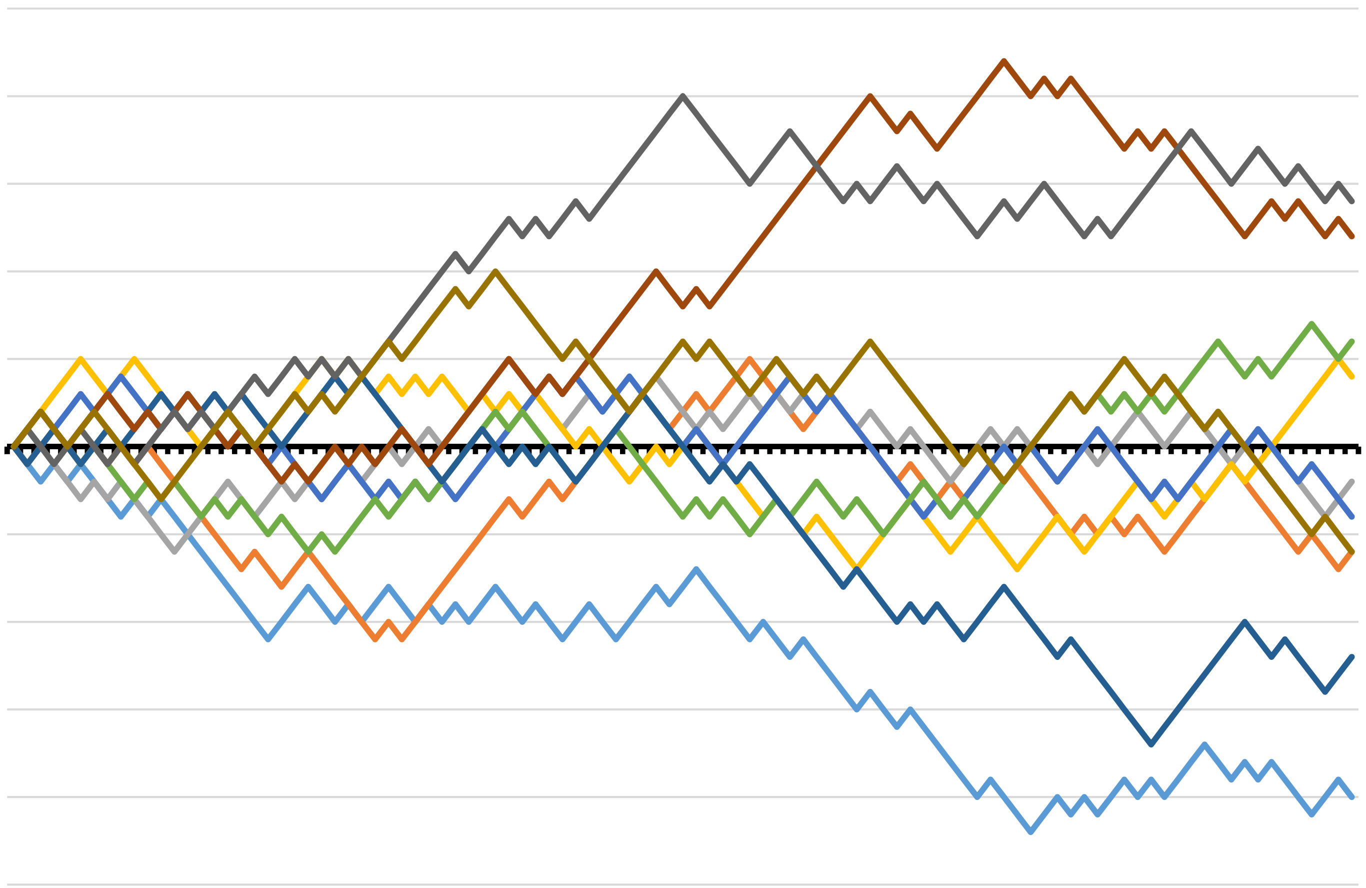
オプション価格における有名なBlack-Scholes式も、数学的には伊藤の公式により確率微分方程式を導いたうえで方程式を解くのがカッコいいが、2項モデルの極限としても導出できる

# ランダムウォークにおける「逆正弦法則」（試験範囲外！）

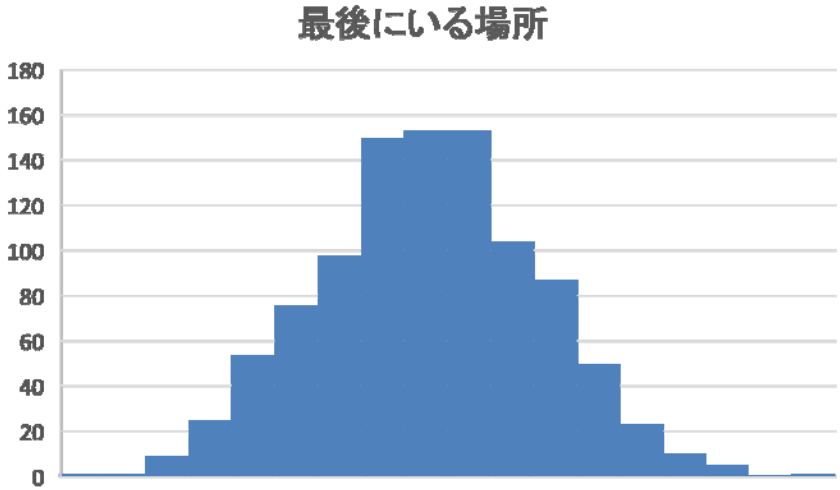
ランダムウォークをパソコンで実験してみる。
ただし確率p＝0.5（対称的なランダムウォーク）とする。

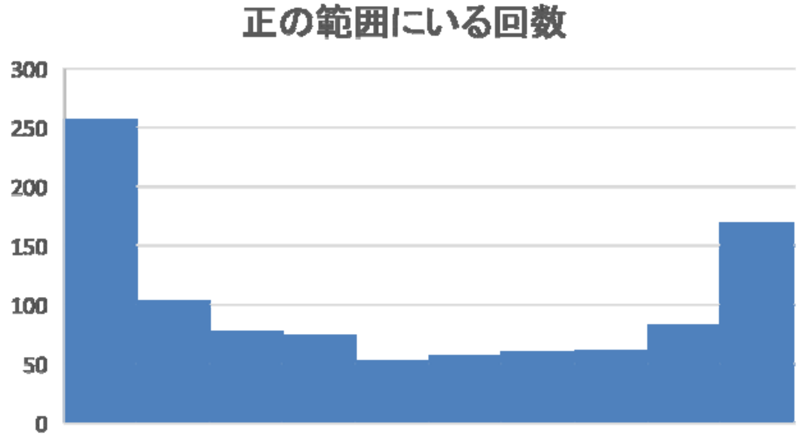
エクセルでは例えば、
セルA1：０
セルA2: =A1+INT(RAND()*2)*2-1
　これを、A3からA101までコピー
　## RAND()　・・・・・・・・・・・０≦x＜１の乱数を発生
　　RAND()*2　・・・・・・・・・ ０≦x＜２の乱数を発生
　　INT(RAND()*2)・・・・・・・確率0.5で0、確率0.5で1
　　INT(RAND()*2)*2-1・・確率0.5で–1、確率0.5で1
折れ線グラフを描き、F9キーで再計算。
正の範囲にいる時間=countif(A2:A101,”>0”)

・最終的には、原点の近くにいる確率は高い。
・しかし、その経路をみると、いったんプラスに行けばずっとプラスにいる（逆にいったんマイナスになってしまえばずっとマイナスにいる）場合が多い。

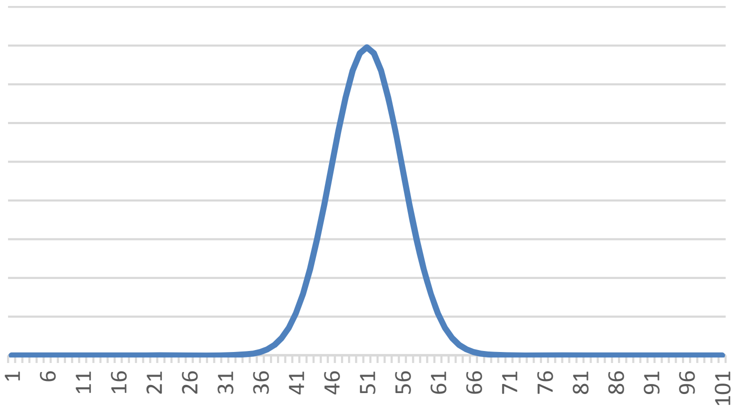


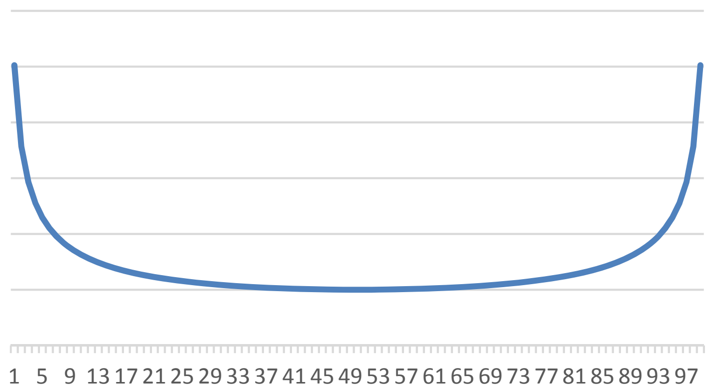
エクセルで何回も実験して度数分布表を描いてみると、
自分でもやってみること！（特にDS学部生は）




回数を増やしていくと



## 「いったん負け始めると、その負けを取り戻すのは大変」

「プラスマイナスの確率がそれぞれ0.5のランダムウォークにおいて、点Pが正の範囲にいる時間の割合をxとする。

このとき、xの確率密度関数f(x)及び確率分布関数F(x)は、ランダムウォークの回数n→∞のとき、

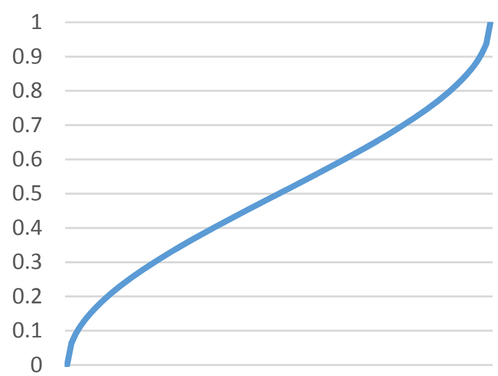
$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\text{、}F(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x})$$ となる。（0≦x≦1）

ただし、arcsinは三角関数sinの逆関数（逆正弦関数）」

（確率密度関数はx＝$\sin^2\theta$と変数変換すると感動的に積分できる）

・最終的にいる場所は、原点近くにいる確率が高い。

・しかしその経路をみると、「正の範囲にいる時間の割合」は、0や1に近いところに偏っている。




正の範囲に1%以下しかいない確率は

F(0.01)＝0.063・・・ 6%もある！

エクセルでは=2/PI()*ASIN(0.01^0.5)

F(0.1) ＝0.204・・・

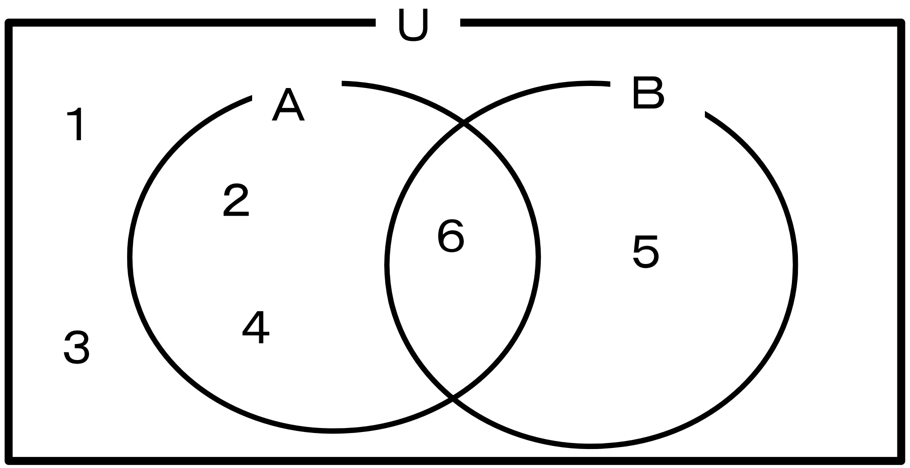
## ３．条件付き確率

例）サイコロを１つ振るという試行において、

事象Ａ＝{偶数の目が出る}

事象Ｂ＝{５か６の目が出る}　とする。

事象Ａが起こったときに事象Ｂが起こる確率は、




全体の根元事象はAに含まれる{２}、{４}、{６}の３つ

そのうち、求める確率に対応する根元事象はA∩Bの{６}

よって、確率は、$\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{n(A\cap B)/n(U)}{n(A)/n(U)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{3}$

これを事象Aが起こったときの事象Bが起こる条件付確率といい、
記号$P_A$(B)で表す。(P(B｜A)と表すこともある)

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

ビジュアル的に理解すると、

・現代数学では、確率とは「面積」だ！

・条件付確率$P_A$(B)とは、ベン図のAの中でBが起こる確率、
すなわち、(A∩Bの面積)÷(Aの面積)。

上の式の分母を払ったものが「確率の乗法定理」

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

分母を払っただけで「定理」というのも大げさだが？！、
モノによっては条件付確率$P_A$(B)の方が簡単にわかる場合もある。

例題１）当たりクジ３本を含む10本のクジから、引いたクジは元に戻さないで２本続けて引くとき、2本とも当たる確率を求めよ。

解１）根元事象に戻って考えると、10本から２本引く場合の数は${}_{10}C_2$＝４５で、これは同様に確からしい。
そのうち2本当たる場合の数は${}_3C_2$＝３なので、
求める確率は3/45＝1/15

解２）Ａ：1回目で当たりを引く
Ｂ：2回目で当たりを引く
とすると、
Ｐ（Ａ）＝3/10で$P_A$（Ｂ）＝2/9だから、
3/10×2/9＝1/15

# ４．事象の独立（independence）

（「試行の独立」とは別の概念なのだが、言葉が同じなので
　マギラワしい。まぁ似ているのであまり気にしなくてもよい）

　事象Ａと事象Ｂが独立であるとは、事象Ｂの起こる確率が事象Ａが起こる起こらないと関係ないこと、つまり
$P_A(B) = P(B)$であることと定義する。

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$となること、と言っても同じ。

（逆に言うと、一般には、$P(A \cap B) = P(A)P(B)$にはならない！）

　独立であるかどうかを哲学的に考えても仕方がない。
　数学では、「定義に照らしてみて、独立かどうか」を機械的にチェック。

例題2）１つのサイコロを振るとき、
A＝{1か2の目が出る}、
B＝{1か3か6の目が出る}、
C＝{2か5か6の目が出る}という事象とする。
　このとき、AとBは独立、AとCは独立であるがBとCは独立でないことを示せ。

答え）面倒くさがらずに、定義にしたがって計算する。
P(A)＝1／3、P(B)＝1／2、P(C)＝1／2
A∩B＝{1の目が出る}だからP(A∩B)＝1／6、
A∩C＝{2の目が出る}だからP(A∩C)＝1／6、
B∩C＝{6の目が出る}だからP(B∩C)＝1／6、
よって、
P(A)×P(B)＝1／6＝P(A∩B)だから、AとBは独立
P(A)×P(C)＝1／6＝P(A∩C)だから、AとCは独立
P(B)×P(C)＝1／4≠P(B∩C)だから、BとCは独立ではない。

例題３）当たりクジ３本を含む10本のクジから、引いたクジは元に戻さないで２本続けて引くとき、

事象Ａ＝{１本目に当たりが出る}

事象Ｂ＝{2本目に当たりが出る}とする。

事象Ａと事象Ｂは独立でないことを示せ。

答え）感覚的には独立でないことが明らかそうだが、定義に従って確認する。

$$P(A)=\frac{3}{10},P(A\cap B)=\frac{1}{15}$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}$$（何番目にひいても当 たる確率は同じ）

$$P(A)P(B)=\frac{9}{100}\neq P(A\cap B)$$なので、独立ではない 。

例題３では、Ｐ（Ａ）＝Ｐ（Ｂ）、すなわち、「１本目に当たりが出る確率と2本目に当たりが出る確率は等しい」ということであった。
⇒実は、これは一般的に成り立つこと。
ｎ本の中にk本の当たりくじがあり、一度引いたくじは元に戻さないとする。このとき、何番目にひいても、当たる確率は等しく、ｋ／ｎ。
「先にひいたほうが有利」とか「残り物には福がある」といったことは、数学の立場からはマチガイ。

直観的には明らか、かな？？？

例えば、「ｎ本のくじから最初にまとめて10本ひき、次にそれを左から順に並べ、一番左を『一番目にひいた』、二番目を『二番目にひいた』と考える。どこに当たりくじが来るかは、まったく等しいはずだ。」