確率への招待　7回目

確率①

確率の定義、基本的性質など

１．事象と確率

（１）確率の意味

・講義の第１回目でも議論したが、素朴には、「ある出来事が起こる確からしさ」

・キチンと定義するのはやや面倒だが、まずは素朴なイメージで十分。

（２）試行、事象、根元事象

・まずは、退屈だがいくつか言葉の準備が必要

試行(trial)：同じ状態のもとで何度も繰り返すことができ、その結果が偶然によって決まるもの。

サイコロを振る、物理実験、など

事象(event)：試行の結果、起こることがら。

サイコロで偶数の目が出る、実験結果が1.3m、など

全事象(universe):試行の結果、起こり得る場合全体の
集合Uで表される事象
根元事象(elementary event):事象の中でもこれ以上簡単
にならない１つ１つの基本的な事象のこと。

例）試行:サイコロを１回振る
事象:サイコロの目の出方
{1の目が出る},{偶数の目が出る}など
全事象:サイコロの目の出方全体の集合
U={１，２，３，４，５，６}に対応
根元事象:サイコロの目の出方の1つ1つ
{1}、{2}、{3}、{4}、{5}、{6}の6つ

事象は、Uの要素というより、Uの部分集合に対応。
（だから、記号で書くときはふつう大文字で書く）
・{1の目が出る}はこれ以上分けられないから根元事象
・{偶数の目が出る}は根元事象ではない。
{2}{4}{6}の3つの根元事象の集まり。

（３）確率の定義（ラプラス「確率の解析的理論」(1812)）

・１つの試行において、ある事象Aの起こることが期待される割合を**事象Aの確率**probabilityといい、記号**P(A)**で表す。

・1つの試行において、根元事象のどれが起こることも同じ程度に期待できるとき、これらの根元事象は**同様に確からしい**という。

・全事象Uの要素の個数をn(U)とし、事象Aの要素の個数をn(A)とする。全事象Uのどの根元事象も同様に確からしいとき、事象Aの確率P(A)を次の式で定める。

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象Aの起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

例）サイコロが公平にできていれば、根元事象｛1｝、｛2｝、｛3｝、｛4｝、｛5｝、｛6｝は同様に確からしい。

A=｛1の目が出る｝とすると、P(A)=1/6

B=｛偶数の目が出る｝とすると、P(B)=3/6＝1/2

かくして、確率の計算は、
・まず、同様に確からしい根元事象にばらした上で、
・確率を求めようとする事象Aの場合の数を求める
ことに帰着される。

第１回で紹介したド・メレの問題（先に４勝した方が賭け金を手に入れる）で、片方が先に４勝して勝負がついているにもかかわらず6回まで勝負を続けることにして計算したのは、「同様に確からしい根元事象」にする必要があったから。

例題１）ガリレオのサイコロの問題

３つの区別のつかないサイコロを振るとき、

①出た目の合計が9になる確率を求めよ

②出た目の合計が10になる確率を求めよ

3つのサイコロの目の和が9になる場合の数は、
(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3)の6とおり。
3つのサイコロの目の和が10になる場合の数は、
(1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4)の6とおり。

３つのサイコロは区別がつかないから場合の数はこれで正しい。
⇒昔の人は「①と②の確率は等しい」と思っていた。
しかし、経験的には、どうも②の方が確率が高そうだ！？。
有名なガリレオが正しい答えを与えた。

⇒実は、(1,2,6)と(3,3,3)の目の出方は同様に確からしくはない。
「ゾロ目」はそれだけ珍しい、ということ。
人間には3つのサイコロは区別はつかないが、神様には区別がつくので、(1,2,6)は根元事象としては(1,2,6),(1,6,2),(2,1,6),(2,6,1),(6,1,2),(6,2,1)の６つに区別して数えなくてはならない。

全ての目が違う場合は、３個の異なるものの順列で6とおり、
２つの目だけが等しい場合は、１つと2つの順列で3とおり。
そうすると、目の和が9になる根元事象の数は、

６＋６＋３＋３＋６＋１＝25

目の和が１０になる根元事象の数は

６＋６＋３＋６＋３＋３＝27

すべての起こり得る場合の数も、3つのサイコロを（神様のつもりになって）区別して数えると6^3＝216。

かくして、求める確率は、

・出た目の和が9になる確率　＝25/216
・出た目の和が１０になる確率＝27/216

やっぱり②の方が確率が高かった。

（５）確率の基本的な性質

ここでも、まずは言葉の定義から。「はじめに言葉ありき」

①積事象と和事象

２つの事象A,Bに対し、

積事象（intersection）：AとBとがともに起こる事象

対応する集合は、AとBの共通部分A∩B（AキャップB）

なので、積事象も記号ではA∩Bで表す。

※日本語訳の「積事象」は？？だが、英語の方がピンとくる。

和事象(union)：AまたはBが起こる事象

こちらも、対応する集合はAとBの和集合A∪B（AカップB）

なので、和事象は記号でA∪Bで表す。

例）１つのサイコロを振るとき、

事象A：6の約数の目が出る。

事象B：４以下の目が出る。 とすると、

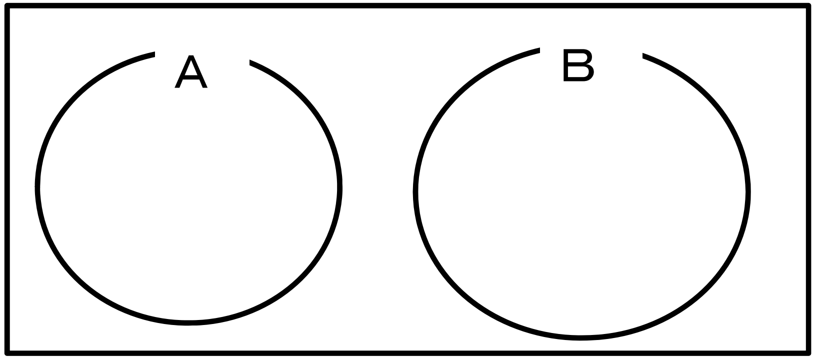
A={1，2，3，6}、B={1，2，3，4}

積事象A∩B＝{1，2，3}、和事象A∪B={1，2，3，4，6}

②排反事象（disjoint）

２つの事象A,Bに対し、AとBが同時には決して起こらないとき、AとBは排反(disjoint)であるという。

ベン図で描くと、



これも、英語のdisjointの方がイメージがわく。

対応する集合の言葉で書くと、A∩B＝Φ（空集合）ということ。

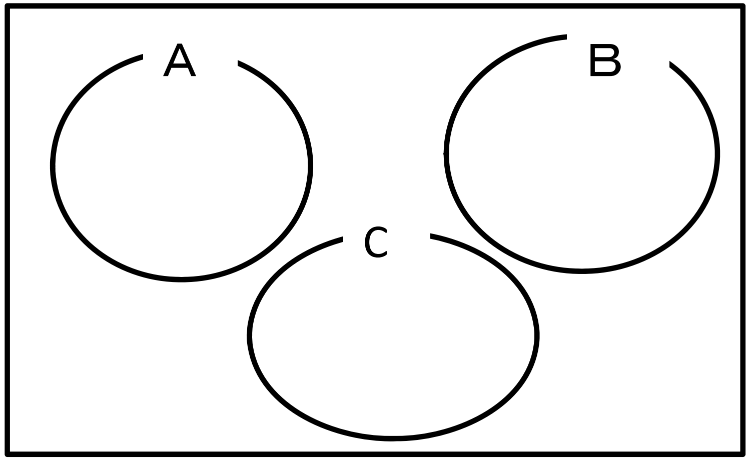
例）U={１から30までの整数の集合}

その部分集合　A={6の倍数の集合}、B={７の倍数の集合}

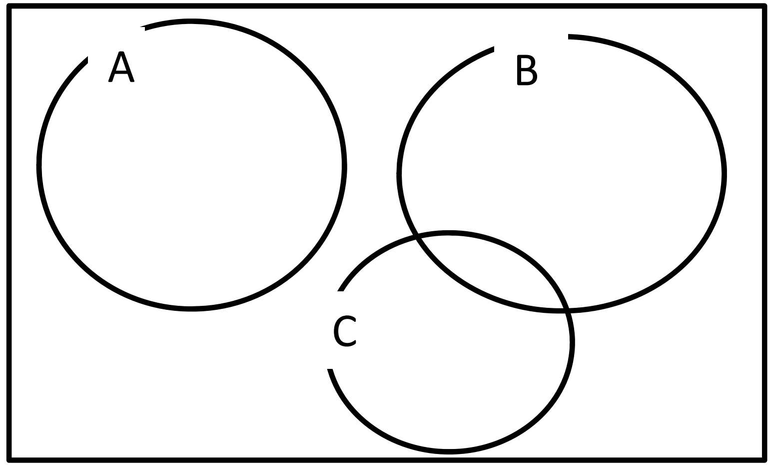
とすると、AとBは排反。

3つ以上の事象A,B,C,･･･については、「どの２つをとっても共通部分がない」場合に、それらを排反であるという。

ベン図で描くと、



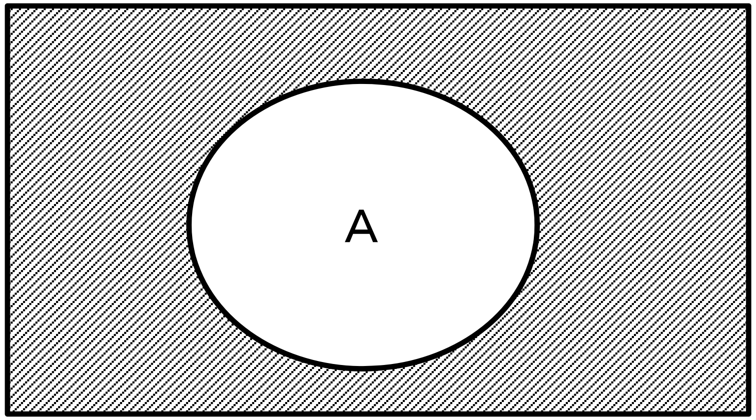
A,B,Cは排反



AとBは排反だが、BとCは排反でないので、A,B,Cは排反ではない。

③余事象（complement）

事象Aに対し、Aが起こらないという事象をAの余事象という。
集合の言葉で言うと、Aの余事象は補集合 $\overline{A}$ にあたるので、同じ記号で表す。



例）3つのサイコロを振るとき、
{少なくとも1つ、6の目が出る}の余事象は、
{6の目が1つもでない}

④確率の基本的な性質

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(U) = 1, \qquad P(\phi) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

とくにAとBが排反であれば$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

例題）３つの区別のつかないサイコロを振るとき、

①３つとも6の目が出る確率はいくらか。

②6の目がちょうど2つ出る確率はいくらか。

③6の目がちょうど１つ出る確率はいくらか。

④6の目が少なくとも１つ出る確率はいくらか。

⑤6の目が１つも出ない確率はいくらか。

ふつうは「少なくとも１つ→余事象を活用！」なのだが、
念のため確認。

① $\frac{1}{216}$ ② $\frac{15}{216}$ ③ $\frac{75}{216}$ ④ $\frac{91}{216}$ ⑤ $\frac{125}{216}$

来週までの宿題（提出しなくてよいが、考えておくべし）

ジョーカーのない52枚のトランプでポーカーをする。
52枚の中から5枚を選ぶとき、以下の役の確率を求めよ。

①ロイヤルストレートフラッシュ（5枚のマークがすべて同じで、10，J，Q，K，Aであるもの）
②ストレートフラッシュ（5枚のマークがすべて同じで、番号が続いているもの。ただし、ロイヤルストレートフラッシュは除き、{J,Q,K,A,2}というのも続き番号とはみなさない）
③フォーカード（5枚のうち4枚が同じ番号）
④フルハウス（5枚のうち2枚と3枚がそれぞれ同じ番号）
⑤フラッシュ（5枚のマークがすべて同じ。ただし上の役を除く（以下同じ））
⑥ストレート（マークに関係なく5枚の数字が連続している）
⑦スリーカード（同じ数字が3枚）
⑧ツーペア（同じ数字の2枚のカードが2組）
⑨ワンペア（同じ数字の2枚のカードが1組）

おまけ：確率の定義（現代数学風に）

ここでの確率の定義（高校数学風）はマチガイではないし、直観に訴えるものだが、以下のような点でやや不足感がある。

①根元事象がすべて同様に確からしい場合にしか定義できないので、例えば「サイコロが歪んでいて１の目が多く出る」、「２人でゲームをするときに、Ａの方が強い」という場合にうまく対応できない。

②集合の要素の数を数えているので、無限集合ではうまく定義できない。

③確率を定義する際に「（根元事象が）同様に確からしい」という確率の概念を使うのは循環論法だ！！！

現代数学では、このような弱点を克服する一方で、「確率とは何か」という哲学的問いに正面から向き合うというより「確率はどういう性質を満たすのか」という外形的性質から「確率とはこういう性質を満たすもの」と、公理論的に定義する。

確率の現代的定義：公理論的確率論

（コルモゴロフ「確率論の基礎概念」(1933)）

全体集合Uを考える。その部分集合Aに対して実数値P（A）を対応させるものが以下の性質を満たすとき、確率と呼ぶ。

①P（U）＝1

②任意の部分集合Aに対しP（A）≧0

③互いに共通部分を持たない（可算個の）部分集合たち$A_1, A_2, A_3, \cdots$に対し、$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \Sigma P(A_i)$

・Uがn個の根元事象からなる有限集合で、各要素に1/nの確率を与えれば、ラプラス流の確率の定義になる。

・コルモゴロフの基礎付けにより、確率論は今や積分論の一分野となっており、「確率微分方程式」などに発展。

ラプラスの魔（Laplace’s demon）

もしもある瞬間における全ての物質の力学的状態と力を知ることができ、かつもしもそれらのデータを解析できるだけの能力の知性が存在するとすれば、この知性にとっては、不確実なことは何もなくなり、その目には未来も（過去同様に）全て見えているであろう。（ラプラス『確率の解析的理論』）

- ニュートン力学を突き詰めると、世の中全てが分かっている全知全能の知性にとっては、未来もすべて決定論的に分かる
  ⇒確率論は不要
- しかし、そうではない人間にとっては、全ての情報（例えば全宇宙の全素粒子の運動方程式）を計算して未来を見通すことはできない。⇒確率論が必要
- 過去のことについても、全ての情報が計算できないのであれば、重要度が低いものは「誤差項」として扱う。
  ⇒ここでも確率論の出番