確率への招待　2回目
集合、場合の数

この講義の本題である「確率」を考えるためには、残念ながら（？）、集合やその要素といったことから始めなくてはならない。

最初は味気ないけれど…

　　集合と位相は現代数学の基礎！

１．集合（set）

（１）集合の定義

・範囲がはっきりしたものの集まりを「集合」という
・その集合を構成している１つ１つのものを、
その集合の「要素」（element）という。

（例）１から4までの自然数の集合A=｛１，２，３，４｝
さいころの目の出方の集合｛１，２，３，４，５，６｝

・集合を表すのに、上記のように要素を書き並べるやり方と、要素が満たす条件を書くやり方がある。

$A=\{x \mid x$は１から4までの自然数$\}$
$=\{x \mid x$は自然数かつ$1 \leq x \leq 4\}$

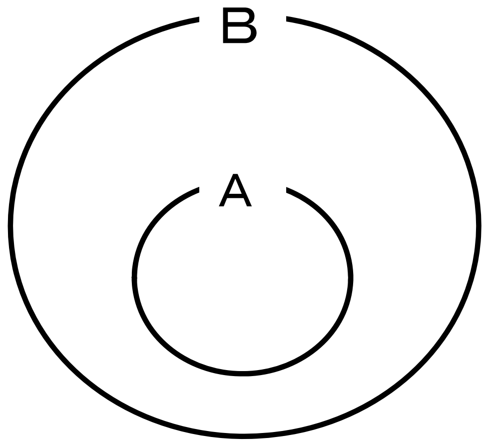
xが集合Aの要素であることを、
　記号で　$x \in A$　と表し、「xはAに属する」という。
逆に、xが集合Aの要素でないことは、
　記号で　$x \notin A$　と表し、「xはAに属さない」という。

さっきの例　$A = \{1, 2, 3, 4\}$だと、
　　$2 \in A$　だが、$5 \notin A$

<u>有限集合と無限集合</u>
　有限個の要素からなる集合を有限集合、
　無限に多くの要素からなる集合を無限集合という。

（２）部分集合subset

２つの集合AとBについて、Aのどの要素もBの要素になっているとき、AはBの部分集合であるといい、記号でA⊂Bと表す。



「AはBに含まれる」とか「BはAを含む」ともいう。

A⊂Bと書いても、B⊃Aと書いても同じ意味。

要素を1つも持たない集合を空集合といい、ϕ で表す。

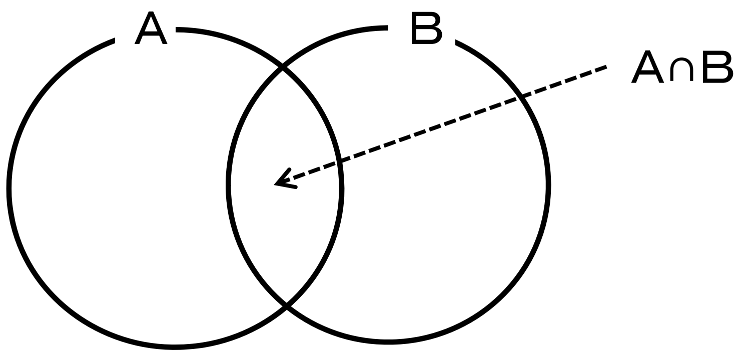
空集合ϕは、どんな集合に対しても、その部分集合。

（3）共通部分intersectionと和集合union

２つの集合AとBについて、

・AとBのどちらにも属する要素全体の集合をAとBの共通部分（交わり）といい、A∩Bと表す。（「Aキャップ B」と読む）

・AとBの少なくとも一方に属する要素全体の集合をAとBの和集合といい、A∪Bと表す。（「Aカップ B」と読む）

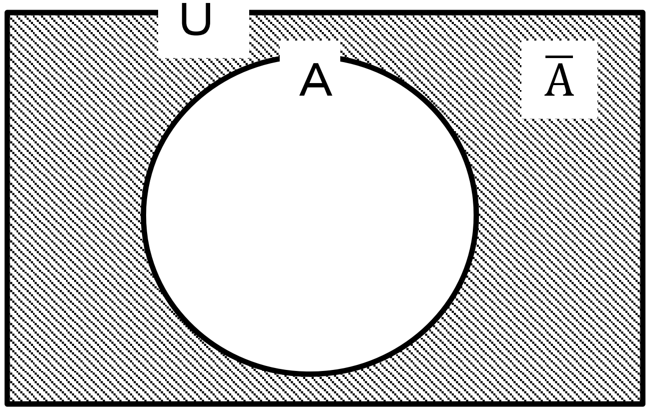


（4）補集合

　集合を考えるとき、まず、１つの集合Uを最初に決めて、集合としてはその部分集合だけを考えることが多い。（最初に、考える「土俵」を決める）

・このとき、集合Uを**全体集合**という（Universe）。

・全体集合Uの部分集合Aに対し、Aに属さない要素全体の集合をUに関するAの**補集合**といい、記号$\overline{A}$で表す。

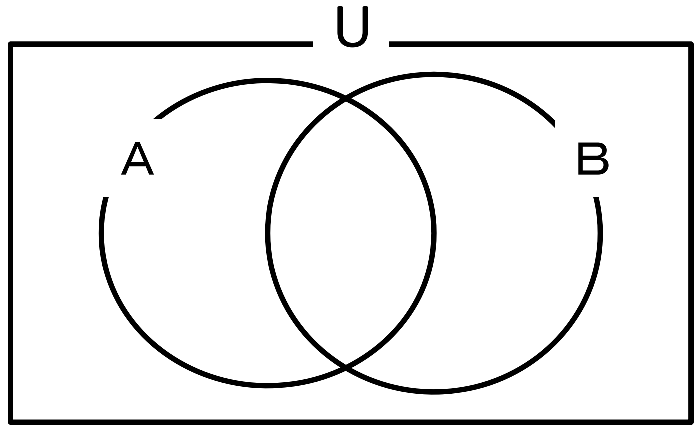


補集合の性質

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$
$$A \cup \bar{A} = U$$
$$\bar{\bar{A}} = A$$ （Aの補集合の補集合はA自身）

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



図を描いて確かめてみよう

ベン図（Venn diagram）

John Venn(1834～1923)：イギリスの数学者、論理学者

例題）
全体集合UをU＝{x｜xは10以下の自然数}
A＝{1，2，3，4}、B＝{x｜xは10以下の偶数}
C＝{6，8，10}
とする。
（1）次の集合を求めよ
$A \cap B$、$A \cap C$、$\overline{B}$、$A \cap \overline{B}$、$\overline{A \cap \overline{B}}$

（2）次のうち、正しいものはどれか
$1 \in B$、$\{2, 4\} \in A$、$\{1, 3, 5\} \subset \overline{A}$、$A \cap B \subset \{2, 4\}$

例題）

（3）$A \cap B$、$A \cup B$、$A \cap \overline{B}$について、

$\{1, 2, 3, 4\} = \{x \mid x$は自然数かつ$1 \leq x \leq 4\}$

の右辺のような表記法を用いて表せ。

（4）

$\{x \mid x$は2の倍数$\} \cap \{x \mid x$は3の倍数$\}$

$\{x \mid x$は関西出身の人$\} \cap \{x \mid x$は関東出身の人$\}$

はそれぞれどのような集合となるか。

２．場合の数

（１）集合の要素の個数

①定義

有限集合Ａに対し、その要素の個数をn(A)で表す。

例）A={１つのサイコロを振ったときに出る目}

とすると、A={１，２，３，４，５，６}なので、

n(A)＝６

空集合ϕは要素が０個なので$n(\phi)$＝０

②和集合の要素の個数

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

とくに$A \cap B = \phi$ならば$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

（ベン図を描いて確かめてみる）

③補集合の要素の個数

全体集合をU、Uのある部分集合をAとすると、

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

これは簡単な式だが、次のような場合に威力を発揮。

例）２つのサイコロを24回振ったとき、(6, 6)の目が少なくとも1回出るのは何通りあるか。

⇒解法１）「少なくとも１回」だから、

「(6, 6)の目が1回だけ出る」「２回だけ出る」・・・

「24回出る」やり方を計算して足し算する。

解法２）「少なくとも１回出る」は「１回も出ない」の補集合だから、「１回も出ない」やり方を計算して全体から引く。

数学は暗記ではないが、先人の知恵は利用しよう

例題）統計検定３級（２０１５年１１月）

１２０人いるクラスで、情報端末の所有状況を調査した。この結果、クラス全体の９０％の学生がスマートフォンを持っており、またクラス全体の１５％の学生がタブレットを持っていた。スマートフォンもタブレットも持っていない学生は3人であった。

このクラスにおいて、スマートフォンもタブレットも持っている学生は何人か。次の①から⑤のうちから適切なものを一つ選べ。

①6人　②7人　③8人　④9人　⑤10人

（２）場合の数

①定義（というほどでもないが・・・）

ある事柄がおこるやり方の数を「場合の数」という。

例）サイコロを１個振ったときの

・目の出方の場合の数　６

・２以下の目が出る場合の数　２

・偶数の目が出る場合の数　３

サイコロを2個振ったとき（２つのサイコロは区別）

・目の出方の場合の数　36

・出た目の合計が3以下である場合の数

（１，１）、（１，２）、（２，１）⇒場合の数は3

・出た目の合計が4以下である場合の数

だんだん面倒になってきた

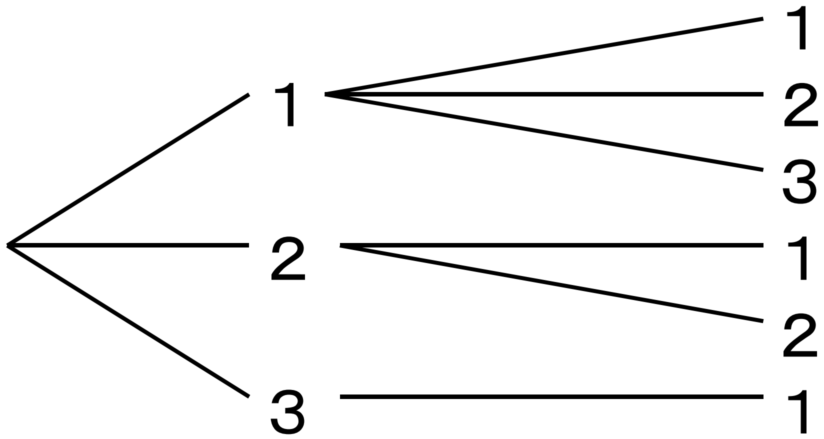
②樹形図、辞書式順序

場合の数を求めるには「全部書き出して数え上げる」のが、泥臭いがもっとも確実！

→ただし、「漏れなく、重複なく」数え上げるのは、けっこう難しい。

→それを見通しよくやる道具が「樹形図」

１番目のサイコロ　　２番目のサイコロ



６とおり

樹形図以外に、「辞書式順序」も用いられる。

③和の法則、積の法則

「樹形図を描いて数え上げるのが基本」といっても、
数が多くなると書ききれない。
→いくつかの「法則」を使うと、計算式により、場合
の数を求めるのがラクになる。

和の法則

２つの事柄AとBが同時には起こらないとする。
Aの起こり方がaとおり、Bの起こり方がbとおり
あるとすると、AまたはBが起こる場合はa+bとおり
ある。

例）サイコロを2回振り、１回目に3の目がでる事象をA、１回目に6の目がでる事象をＢとすると、Ａ、Ｂともに場合の数は6であり、Ａ∪Ｂの場合（つまり、１回目に3または6がでる場合）の数は１２である。

積の法則

　事柄Aの起こり方がaとおりあり、そのおのおのの場合について、事柄Bの起こり方がbとおりあるとすると、AとBがともに起こる場合はabとおりある。

例）大中小3つのサイコロを振るとき、目の出方は
　何通りあるか。

　⇒$6\times6\times6=216$

　カルダノのように数え上げなくてもできた！

例）200の正の約数は何個あるか。

　⇒200を素因数分解すると、$200=2^3\times5^2$

　200の正の約数は$2^a\times5^b$と書け、

　aは0, 1, 2, 3の4とおり、それぞれに対しbは0, 1, 2の3とおり。

　積の法則により、200の正の約数は$4\times3=12$個

おまけ：無限集合の大きさ（濃度）と連続体仮説 （試験範囲ではありません）

講義では、有限集合に対してその要素の個数を考えた。
⇒無限集合ではどうなるの？
　もちろん、「無限集合の要素の個数は無限大」だが、
　多い・少ないという比較はできないか？

有限集合では、２つの集合A、Bの要素の個数が等しければ（かつそのときに限り）、Aの要素とBの要素との間に１対１の対応がつけられる。
それを無限集合にも広げて、「２つの集合A、Bに対し、Aの要素とBの要素との間に1対１の対応がつけられるとき、AとBの「濃度cardinality」が等しい、と定義する。

ただ、無限の場合には、いろいろ不可思議なことが起きる。

例）｛自然数全体｝と｛自然数のうちの偶数｝は濃度が等しい。
　証明）n∈｛自然数全体の集合｝に対し、
　　　2n∈｛自然数のうち偶数の集合｝を対応させると、
　　　これは１対１の対応になる。

｛偶数全体｝は｛自然数全体｝の真の部分集合なのに、濃度は同じ⇒「全体」と「部分」が同じ？？？
｛自然数全体の集合｝の濃度を「可算（countable）」という。
「数え上げれることが可能」という意味。

例）有理数全体は可算濃度
　証明）有理数m/nに対し、その「高さ」hを$h = |m| + |n|$で定義する。hは自然数であり、hを決めると高さがhの有理数は有限個しかないので、hの小さい順から番号を振れば、全ての有理数に番号を振ることができる。

実数全体は可算ではない（自然数や有理数よりずっと多い）
証明）「対角線論法」 背理法で証明する。
仮に実数全体が可算だと仮定すると、その部分集合である{0以上で1より小さい実数全体}も可算のはず。
それを1番目から順に並べて、たとえば

a_1＝0.1000000000・・・・
a_2＝0.0100000000・・・・
a_3＝0.1235678901・・・・
・・・・・・・・・・・・・となったとする。

ここで、bという数を、「小数点以下k桁が、a_kの小数点以下k桁目の数字とも9とも異なる」というルールで作ると、bはどのa_kとも異なる。つまり、番号がついてない実数があったことになり矛盾。（9を避けるのは、0.9999・・＝1だから）

実数全体の集合の濃度を「連続体濃度」という。
連続体仮説：可算濃度と連続濃度の間の濃度を持つ集合はない←これは「証明も反証もできない」ことが分かっている。

「可算」というのは、現代確率論の基礎である測度論（ルベーグ積分論）でも基礎的な概念。

測度論では、まず、実数の集合に対して、その「測度」λを定義。
面積みたいなもの！

・a＜bである実数a，bに対し、区間[a，b]の測度はb－a

・ただ1つの実数からなる集合の測度はゼロ
（点の面積はゼロ、ということ）

・互いに共通部分を持たない可算個の集合A_1, A_2，・・・に対し、
$\lambda(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) + \cdots$
⇒有理数全体の集合の測度はゼロ

関数f(x)を、f(x)＝１　（xが有理数のとき）
　　　　　　　　　０　（xが無理数のとき）
とすると、積分 $\int_0^1 f(x)dx = ?$

高校～大学1年で教わる積分（リーマン積分）では「積分不可！」
ルベーグ積分では、積分できてゼロ。

「証明も反証もできない」というのは摩訶不思議だが、他にもある。

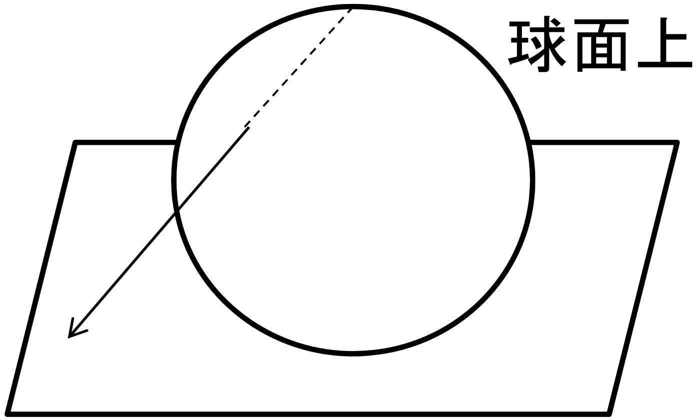
例）ユークリッド幾何学の「平行線の公理」

「1本の直線とその直線上にない1つの点に対し、その点を通り
与えられた直線と平行な直線が一つ存在し、しかも一つに限る」

ユークリッドは、これを他の公理から証明しようとしたが、どうしても証明できなかった⇒「公理」とすることにした！

実際、「平行線の公理」が成り立たないというような幾何学も存在する（「非ユークリッド幾何学」）

射影平面・・・地球儀の北極から線を引いて、地球儀上の点と下の平面に映った影を対応させると、球面上の点と、平面上の点＋無限遠点は1：1対応。これを射影平面という。



「射影平面上のm次曲線とn次曲線は、重複度を込めて（複素数解も含めて）数えるとmn個の交点を持つ（ベズーの定理）」