CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-50

相似拡大的頑健効用と2ファクター・ハル・ホワイト型本質的アフィン証券市場モデルに基づく消費と株式指数・全満期国債投資の多期間最適化問題に対する近似解析解

楠田浩二、菊池健太郎

2014 年 12 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

相似拡大的頑健効用と 2 ファクター・ハル・ホワイト型本質的アフィン証券市場モデルに基づく消費と株式指数・全満期国債投資の多期間最適化問題に対する近似解析解

楠田　浩二 [1]　　　菊池　健太郎

概 要

世界金融危機を契機に「ナイトの不確実性」を考慮した投資の頑健最適化の必要性が認識され始めている。一方、長期投資を行っている多くの投資家、特に金融機関は短期から中長期或いは超長期までの債券を中心とする運用を行っている。楠田（2013）は、ナイトの不確実性下で「相似拡大的頑健効用」（Maenhout (2004)）を所持する投資家が株式指数と全満期の国債に投資する、消費と証券投資の多期間最適化問題において、短期金利と平均短期金利を状態変数とする 2 ファクター完備アフィン・モデルを仮定し近似解析解を導出している。本稿では、同モデルにおいて一定と仮定されているリスクの市場価格を状態変数のアフィン関数に一般化した本質的アフィン・モデルの下で、必要条件である HJB 方程式の近似解析解を導出する。同解は一般に複数存在することから、最適解である為の十分条件を導出する。

キーワード: 確率制御、頑健効用、近似解析解、金利リスク、債券投資、十分条件、2 ファクター・モデル、ナイトの不確実性、ポートフォリオ最適化

JEL 分類番号: C62、D14、G11

1　序論

世界金融危機を契機に「ナイトの不確実性」を考慮した投資の頑健最適化の必要性が認識され始めている一方、長期投資を行っている多くの投資家、特に金融機関は短期から中長期或いは超長期までの債券を中心とする運用を行っている。後者の問題に関しては、Campbell and Viceira (2002) が、CRRA 効用を所持する投資家がバシチェック金利モデルの下で安全証券と一定満期の国債に投資する多期間最適化問題に近似解析解を示している。前者の問題に関しては、Maenhout (2004) が「頑健効用」（Anderson, Hansen, and Sargent (2003)）に効用関数の有すべき望ましい性質とされる「相似拡大性」を付与すべく改良した「相似拡大的頑健効用」を提案し、ナイトの不確実性下で相似拡大的頑健効用を所持する投資家が一定金利の下、安全証券と株式に投資する多期間最適化問題に解析解を与えている。

最近になって、楠田 (2013) はナイトの不確実性下で相似拡大的頑健効用を所持する投資家が株式指数と「短期から超長期までの全満期の債券」を投資対象とする、消費と証券投資の多期間最適化問題を考察している。そして、不況リスクに加え長期投資ならではの長期停滞リスクを捉える為、短期金利と平均短期金利を状態変数とし、リスクの市場価格を状態変数のアフィン関数とする 2 ファクター「本質的アフィン・モデル」を仮定している。楠田 (2013) は本最適化問題の HJB 方程式を満たす値関数の関数形を導出しているが、値関数を構成する未知の 6 係数体系は 6 元連立非線形方程式の解であり、一般的に解は複数存在する。そこで、金利モデルの係数への制約に加え、リスクの市場価格一定の「完備アフィン・モデル」（Duffee (2002)）を改めて仮定することによって、解が 2 個に絞られることを示しているが、2 ファクター完備アフィン・モデルは証券価格の変動を適切に捉えることは出来ない。

そこで本稿では、2 ファクター本質的アフィン・モデルの下で導出される値関数の 6 係数体系の 6 元連立非線形方程式の解が最適解であるための十分条件を Maslowski and Veverka (2013) の議論を応用して導出する。Maslowski and Veverka (2013) は、通常の目的関数の最大化問題に対し、一般化 Hamiltonian 関数が満たすべき条件を十分条件として導出している。本問題では、頑健性確保の為の最悪確率導出過程が最小化であり、問題全体は最小最大化問題となっていることから彼等の議論を直接適用することは出来ない。そこで、

[1]kusuda@biwako.shiga-u.ac.jp

本研究は JSPS 科研費 26380392 の助成を受けたものであり、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター東アジア保険プロジェクトにおける中国東北財経大学金融学院との共同研究の成果の一部である。尚、本研究の過程では、リスク研究センター長・久保英也教授に有益な御指摘と御鞭撻を賜った。ここに特筆して厚く感謝申し上げる。

最小化の結果現れる目的関数を最大化する問題が本来の問題の HJB 方程式と同一の HJB 方程式を導くことに着目し、同最大化問題の一般化 Hamilotonian 関数を対象に十分条件を導出する。

本稿の構成は次の通りである。2 章では、楠田（2013）の消費と証券投資の頑健最適化モデルを紹介する。3 章で、近似解析解の候補を導出し、4 章で、最適解であるための十分条件を導出する。

2 楠田 (2013) の消費と証券投資の頑健最適化モデル

本章では、楠田 (2013) の消費と証券投資の頑健最適化モデルを紹介する。先ず、2 ファクター・本質的アフィン・モデル等の市場環境を示した後、相似拡大的頑健効用を説明する。そして、同効用下の消費と株式・債券投資の多期間最適化問題に対する解の必要条件である HJB 方程式の導出過程と結果を示す。

2.1 市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。投資家共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデル化されている。ここで、$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は 2 次元標準ブラウン運動 z によって生成される自然なフィルター付けである。確率測度 P の下での期待作用素を E と表記する。一種類の消費財、株式指数、満期までの期間が最長 $\bar{\tau}$ の任意の満期の割引債が任意の時点で市場で取引されている。株価指数の価格を S、満期 T の割引債の価格を B^T と表記する。消費財空間は、消費率過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty \quad a.s.$ を満たす非負値適合的過程の空間とする。

金利については、不況リスクに加え長期投資リスクである長期停滞リスクを捉える為、バシチェック・モデルにおいて定数と仮定されている平均金利の変動を織り込んで満期の異なる債券間の相関の表現を企図したハル・ホワイト型モデル (Hull and White (1994)) を仮定する。

仮定 1. 瞬間的スポット・レート r は次の過程に従う。

$$dr_t = \kappa(\bar{r}_t - r_t)\,dt - \sigma\,dz_{1t} \tag{2.1}$$

$$d\bar{r}_t = \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t)\,dt - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i\,\bar{\sigma}\,dz_{it} \tag{2.2}$$

ここで、κ は瞬間的スポット・レートの平均金利過程 $\bar{r}_t$ への回帰速度、σ は拡散係数、$\bar{\kappa}$ は平均金利過程の平均金利 $\bar{r}$ への回帰速度、$\bar{\sigma}$ は拡散係数をそれぞれ表す正の定数である。また、$\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2 \in [-1, 1]$ で、$\bar{\rho}_1$ は金利変化 dr_t と平均金利変化 $d\bar{r}_t$ の相関を表しており、$\bar{\rho}_1^2 + \bar{\rho}_2^2 = 1$ を満たしている。

以下では、瞬間的スポット・レート r_t を「短期金利」、平均金利過程 $\bar{r}_t$ を「平均短期金利」、平均金利 $\bar{r}$ を「長期平均短期金利」と呼ぶ。上記モデルは、状態変数 $(r_t, \bar{r}_t)$ の「アフィン・モデル」（Duffie and Kan (1996)）に包含される。リスクの市場価格については、状態変数のアフィン関数と仮定された「本質的アフィン・モデル」を仮定する。また、株式指数の収益率のボラティリティは一定と仮定する。

仮定 2. *1.* リスクの市場価格 λ は短期金利と平均短期金利のアフィン関数である。

$$\lambda_{it} = \lambda_i + \lambda_{i1} r_t + \lambda_{i2} \bar{r}_t \qquad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

ここで、$\lambda_i, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ は定数である。

2. 株式指数の収益率のボラティリティは (v_1, v_2) である。ここで、v_i は dz_{it} に対応するボラテリティである。

2.2 証券価格過程と予算制約式

補題 1. 仮定 *1*・*2* の下、株式指数 S と満期 T の割引債の無裁定価格 B^T は次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} v_i \lambda_{it}\right) dt + \sum_{i=1}^{2} v_i \, dz_{it} \tag{2.4}$$

$$\frac{dB_t^T}{B_t^T} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau) \lambda_{it}\right) dt + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau) \, dz_{it} \tag{2.5}$$

ここで、$\tau = T - t$ で、

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(\tau) \\ \sigma_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} \\ 0 & \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

ここで、(b_1, b_2) は次の非斉次の定数係数線形連立常微分方程式の境界値問題の解析解である。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa + \sigma \lambda_{11} & \bar{\sigma} \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \lambda_{i1} \\ -\kappa & \bar{\kappa} + \bar{\sigma} \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \lambda_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

境界条件：$b_1(T) = b_2(T) = 0$

証明. 楠田 (2013) の補論 A.1 参照。 □

投資家は初期時点の短期金利 r_0、平均短期金利 $\bar{r}_0$、富 W_0 を所与として、常に富が負とならないように株式指数と全満期の国債を対象に投資することによって効用を最大化する問題を解く。通常は富に対する証券の投資比率を最適化するが、本稿では、任意の満期の国債を投資対象としているため富に対する債券投資比率密度過程 $\varphi_t(\tau)$ を最適化する。ここで、τ は国債の満期までの期間を表している。[1] また、以下では、全債券への投資比率を Φ と表記するが、

$$\Phi_t = \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) d\tau \tag{2.8}$$

であることを予め留意されたい。

補題 2. 債券の投資比率密度過程 φ と消費率過程 c を所与とする。このとき、仮定 *1*・*2* の下、富過程 W は次の予算制約式を満たす。

$$dW_t = \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \Psi_{it} \lambda_{it} \right) W_t - c_t \right\} dt + \sum_{i=1}^{2} \Psi_{it} W_t dz_{it} \tag{2.9}$$

ここで、

$$\Psi_{it} = \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \sigma_i(\tau) d\tau + (1 - \Phi_t) \rho_i v \qquad i = 1, 2$$

証明. 楠田 (2013) の補論 A.2 参照。 □

予算制約式 (2.9) は、富過程が $u = (c, \Psi_1, \Psi_2)$ で決定されることを示しており、投資家の効用最大化問題における制御変数は $u = (c, \Psi_1, \Psi_2)$ であることが分かる。ここで、(Ψ_1, Ψ_2) は富のボラティリティを表しているので、以下では、(Ψ_1, Ψ_2) を「富ボラティリティ・ベースの投資比率」、或いは、略して「投資比率」と呼ぶ。

予算制約式 (2.9) を満たす制御変数 $u = (c, \Psi_1, \Psi_2)$ を初期状態 $X_0 = (W_0, r_0, \bar{r}_0)$ に対する許容的制御と呼び、許容的制御の集合を $\mathcal{B}(X_0)$ と表記する。このとき、最適投資問題は次式で定義され、同時に値関数 $V(X_0)$ が定義される。

$$V(X_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(X_0)} U(c) \tag{2.10}$$

[1] 尚、このとき、或る特定の満期の国債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため、許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする。

2.3 相似拡大的頑健効用

ナイトの不確実性下、「頑健効用」（Anderson, Hansen, and Sargent (2003)）を所持する投資家は現実の確率測度として P を尤も有り得べき確率測度（以下、「参考確率測度」、或いは「参考確率」と呼ぶ）と認識しているが、参考確率測度 P 以外の確率測度である可能性を否定出来ない。そこで、彼女或いは彼は参考確率 P 以外の確率測度の候補として、全ての「等価確率測度」[2] の集合 $\mathbb{P}$ を想定する。そして、彼女或いは彼は各消費計画に対し最悪の場合の等価確率測度を想定して、$\mathbb{P}$ 上で「期待効用汎関数」を最小化する等価確率測度（以下、「最悪確率」と呼ぶ）を求める。この際、参考確率 P を尤も有り得べき確率と認識している以上、参考確率 P と大幅に乖離する最悪確率を想定することは慎重を通り越して杞憂の誇りを免れない。そこで、参考確率 P との乖離に損失を与える、P に対する P^ξ の相対エントロピーの割引現在価値

$$\mathcal{R}^\xi := E^\xi\left[\int_0^\infty \beta e^{-\beta t}\log E_t\left[\frac{dP^\xi}{dP}\right]dt\right] \tag{2.11}$$

を期待効用汎関数に次のように付加した汎関数を最小化対象とする。

$$U(c) = \inf_{P^\xi\in\mathbb{P}} E^\xi\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}v(c_t)\,dt\right] + \frac{1}{\theta}\mathcal{R}^\xi \tag{2.12}$$

ここで、β は割引率、v は時点効用関数、θ は「曖昧性の回避度合」を表す正の定数である。

割引相対エントロピー過程 $\mathcal{R}_t^\xi$ の Skiadas (2003) による表現 [3] を用いると、頑健効用は次式で表現される。

$$U(c) = \inf_{P^\xi\in\mathbb{P}} E^\xi\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\left\{v(c_t) + \frac{1}{2\theta}\left(\xi_{1t}^2+\xi_{2t}^2\right)\right\}dt\right]$$

頑健効用において曖昧性の回避度合を表す θ は一定で状態に独立である。また、効用汎関数が備えるべき望ましい性質とされる「相似拡大性」を有しておらず、富が増大するにつれて頑健性は低下する。Maenhout (2004) は、頑健効用に相似拡大性を付与すべく、$v(c_t)$ を CRRA 効用型、θ を (2.14) 式のように状態変数に依存する形とした 「相似拡大的頑健効用」を提唱している。

仮定 3. 投資家は次の相似拡大的頑健効用を所持している。

$$U(c) = \inf_{P^\xi\in\mathbb{P}} E^\xi\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\left\{\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)V(X_t)}{2\delta}\left(\xi_{1t}^2+\xi_{2t}^2\right)\right\}dt\right] \tag{2.14}$$

ここで、δ は曖昧性の回避度合を表す正の定数である。

2.4 相似拡大的頑健効用下の確率制御

最悪確率候補としての等価確率測度 P^ξ の下での標準ブラウン運動 z^ξ は

$$z_{it}^\xi = z_{it} - \int_0^t \xi_{is}ds \qquad i=1,2$$

[2] ここで、$\tilde{P}$ が P の等価確率測度とは、両測度の零集合が一致している場合（$P(A)=0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A)=0$）を言う。尚、任意の等価確率測度 P^ξ は、ギルサノフの定理により、ノビコフの可積分条件を満たす適合的過程 $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ により、ラドン・ニコディム微分として、次式のように表現される。

$$\frac{dP^\xi}{dP} = \exp\left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^2 \xi_{it}\,dz_{it} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \|\xi_t\|^2 dt\right)$$

[3] Skiadas (2003) は割引相対エントロピー過程 $\mathcal{R}_t^\xi$ が次式で表現出来ることを示している。

$$\mathcal{R}_t^\xi = \frac{1}{2}E_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-(s-t)}\|\xi_t\|^2 ds\right] \tag{2.13}$$

と表されるので、等価確率測度 P^{ξ} の下での状態変数に関する確率微分方程式は次のように書き改められる。

$$dW_t = \left\{\left(r_t + \sum_{i=1}^{2}\Psi_{it}\lambda_{it}\right)W_t - c_t + \sum_{i=1}^{2}\Psi_{it}\,W_t\,\xi_{it}\right\}dt + \sum_{i=1}^{2}\Psi_{it}W_t\,dz_{it}^{\xi}$$

$$dr_t = \Big(\kappa\big(\bar{r}_t - r_t\big) - \sigma\xi_{1t}\Big)\,dt - \sigma\,dz_{1t}^{\xi}$$

$$d\bar{r}_t = \left(\bar{\kappa}\big(\bar{r} - \bar{r}_t\big) - \sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\xi_{it}\right)\,dt - \sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\,dz_{it}^{\xi}$$

従って、相似拡大的頑健効用における最適化の必要条件である HJB 方程式は次式のように表される。

$$\sup_{u\in\mathcal{B}(X_0)}\inf_{P^{\xi}\in\mathbb{P}}\left[\mathcal{D}^uV - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)V}{2\delta}\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) + \Big(\Psi_{1t}W_tV_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\Big)\xi_1 + \Big(\Psi_{2t}W_tV_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\Big)\xi_2\right] = 0 \tag{2.15}$$

$$\text{s.t.}\quad \lim_{T\to\infty}E[e^{-\beta T}V\ (X_T)] = 0$$

ここで、

$$\mathcal{D}^uV = \left\{\left(r_t + \sum_{i=1}^{2}\Psi_{it}\lambda_{it}\right)W_t - c_t\right\}V_W + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Psi_{it}^2W_t^2V_{WW}$$
$$-\Psi_{1t}\sigma\,W_tV_{Wr} - \sum_{i=1}^{2}\Psi_{it}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\,W_tV_{W\bar{r}} + \kappa(\bar{r}_t - r_t)V_r + \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t)V_{\bar{r}} + \frac{1}{2}\sigma^2V_{rr} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2V_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}V_{r\bar{r}} \tag{2.16}$$

HJB 方程式 (2.15) における ξ に関する最小化条件より、最悪確率測度 P^{ξ^*} が次のように求められる。

$$\begin{pmatrix}\xi_1^*\\ \xi_2^*\end{pmatrix} = -\frac{\delta}{(1-\gamma)V}\begin{pmatrix}\Psi_{1t}W_tV_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\\ \Psi_{2t}W_tV_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\end{pmatrix} \tag{2.17}$$

最悪確率測度 P^{ξ^*} を HJB 方程式 (2.15) に代入すると、次式を得る。

$$\sup_{u\in\mathcal{B}(X_0)}\left[\mathcal{D}^uV - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\left\{\Big(\Psi_{1t}W_tV_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\Big)^2 + \Big(\Psi_{2t}W_tV_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\Big)^2\right\}\right] = 0 \tag{2.18}$$

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解 $u^* = (c^*, \Phi_1^*, \Psi_2^*)$ は次式を満たしている。

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{2.19}$$

$$\Psi_{1t}^* = -\frac{V_W}{W_t\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\lambda_{1t} + \frac{V_{Wr} - \frac{\delta V_WV_r}{(1-\gamma)V}}{W_t\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\sigma + \frac{V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_WV_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{W_t\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\bar{\rho}_1\bar{\sigma} \tag{2.20}$$

$$\Psi_{2t}^* = -\frac{V_W}{W_t\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\lambda_{2t} + \frac{V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_WV_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{W_t\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\bar{\rho}_2\bar{\sigma} \tag{2.21}$$

最適消費 (2.19) 式と最適投資比率 (2.20)(2.21) 式を HJB 方程式 (2.18) に代入して整理すると、次の値関数 V に関する偏微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{2}\sigma^2V_{rr} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2V_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}V_{r\bar{r}} - \frac{1}{2}\frac{q_1^2(Y_1)}{p(Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{q_2^2(Y_1)}{p(Y_t)} + \frac{\delta}{2(\gamma-1)V}\left(\sigma^2V_r^2 + \bar{\sigma}^2V_{\bar{r}}^2 + 2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}V_rV_{\bar{r}}\right)$$
$$+ r_tW_tV_W + \kappa(\bar{r}_t - r_t)V_r + \kappa(\bar{r} - \bar{r}_t)V_{\bar{r}} - \beta V + \frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 0 \tag{2.22}$$

$$p(Y_t) = W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right) \tag{2.23}$$

$$q_1(Y_t) = W_t \left\{ \lambda_1 V_W - \sigma \left(V_{Wr} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V} \right) - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} \left(V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V} \right) \right\} \tag{2.24}$$

$$q_2(Y_t) = W_t \left\{ \lambda_2 V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} \left(V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V} \right) \right\} \tag{2.25}$$

上記偏微分方程式から値関数が次の関数形であることが推測される。

$$V(W_t, r_t, \bar{r}_t) = \big(H(r_t, \bar{r}_t)\big)^{\gamma} \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{2.26}$$

値関数 V に偏微分を施し、(2.20)(2.21) 式に代入し、値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (2.22) に代入すると、次の命題を得る。

命題 1. 仮定 *1・2・3* の下、本問題 *(2.10)* の最適投資比率密度 φ^* は *(2.27)(2.28)* 式を満たしており、値関数 V を構成する関数 $H(r_t, \bar{r}_t)$ は *2* 階の偏微分方程式 *(2.29)* の解である。

$$\Psi_{1t}^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{1t} + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\sigma\frac{H_r}{H} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{2.27}$$

$$\Psi_{2t}^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{2t} + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right) + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right) + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2 + \bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2 + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\} \\
&\quad + \left(\kappa(\bar{r}_t - r_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\lambda_{1t}\right)\left(\frac{H_r}{H}\right) + \left(\bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_{it}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}(\lambda_{1t}^2 + \lambda_{2t}^2) + \frac{\gamma-1}{\gamma}r_t + \frac{\beta}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{H}\right) = 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

証明. 楠田 (2013) の補論 A.3 参照。 □

3 近似解析解の候補

本章では、推測された値関数を構成する短期金利・平均短期金利の 2 変数関数の非斉次の偏微分方程式を導出し、非斉次項を Campbell and Viceira (2002)、楠田 (2013) の技法で近似して、近似解析解の候補を導出する。

3.1 値関数を構成する金利関数の偏微分方程式の非斉次項近似

偏微分方程式 (2.29) は消費・効用過程に起因する非斉次項 $1/H$ を含んでおり、解析解の導出を困難にしている。そこで、Campbell and Viceira (2002) が CRRA 効用と 1 ファクター金利モデルを仮定し、消費と 2 証券（安全証券と 1 債券）投資の最適化問題で導出した金利関数の常微分方程式の近似解析解を導出する際に用いた非斉次項の対数線形近似を用いる。

すなわち、(2.19) 式と値関数 (2.26) から $1/H(r_t, \bar{r}_t) = c_t/W_t$ が成立していることに留意し、$1/H(r_t, \bar{r}_t)$ を次のように $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで [4] 対数線形近似する。

$$\frac{1}{H(r_t, \bar{r}_t)} \approx h_0 - h_1 \log H(r_t, \bar{r}_t) \tag{3.1}$$

[4] Campbell and Viceira (2002) は $E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似しているが、この場合、$E[\log c_t - \log W_t]$ は r と r_t に依存する。そこで、一定値をとる $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似を行っている。

ここで、

$$h_0 := h_1(1-\log h_1) \tag{3.2}$$

$$h_1 := \exp\Big(\lim_{t\to\infty} E\Big[\log\Big(\frac{c_t}{W_t}\Big)\Big]\Big) \tag{3.3}$$

(3.1) 式を偏微分方程式 (2.29) の非斉次項 $1/H$ に代入すると、次の近似偏微分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right)+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right)+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}\\
&\quad+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\lambda_{1t}\right)\left(\frac{H_r}{H}\right)+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_{it}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\\
&\quad-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}(\lambda_{1t}^2+\lambda_{2t}^2)+\frac{(\gamma-1)}{\gamma}r_t+\frac{\beta}{\gamma}-h_0\right)-h_1\log H=0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

近似偏微分方程式 (3.4) の解が次式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される。

$$H(r_t,\bar{r}_t)=\exp\left(a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right) \tag{3.5}$$

次に、

$$h_1=-\log H(r_t,\bar{r}_t)=\lim_{t\to\infty}\left[-a_0-a_1E[r_t]-a_2E[\bar{r}_t]-\frac{1}{2}a_{11}E[r_t^2]-a_{12}E[r_t\bar{r}_t]-\frac{1}{2}a_{22}E[\bar{r}_t^2]\right] \tag{3.6}$$

を算出するために、SDE(2.2) の解 $(r_t,\bar{r}_t)$ を導出する。

補題 3. 金利 $(r_t,\bar{r}_t)$ は線形確率微分方程式 *(2.2)* の解として、次のように表される。

$$\begin{aligned}
r_t&=\bar{r}+e^{-\kappa t}\left(r_0-\frac{\kappa}{\kappa-\bar{\kappa}}\bar{r}_0+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa-\bar{\kappa}}\bar{r}_t\right)+e^{-\bar{\kappa}t}\frac{\kappa}{\kappa-\bar{\kappa}}(\bar{r}_0-\bar{r}_t)\\
&\quad-\frac{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\int_0^t\left\{e^{\bar{\kappa}(s-t)}+\frac{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma-\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}e^{\kappa(s-t)}\right\}dz_{1s}-\frac{\kappa\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\int_0^t\big(e^{\bar{\kappa}(s-t)}-e^{\kappa(s-t)}\big)dz_{2s}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\bar{r}_t=\bar{r}+e^{-\bar{\kappa}t}(\bar{r}_0-\bar{r})-\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\int_0^t e^{\bar{\kappa}(s-t)}dz_{is} \tag{3.8}$$

証明. 補論 A.1 参照。 □

補題 3 より、次の補題を得る。

補題 4. h_1 は $(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22})$ により次式で表せる。

$$\begin{aligned}
h_1&=-a_0-\bar{r}(a_1+a_2)-\frac{1}{2}\left(\bar{r}^2+\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)a_{11}-\left\{\bar{r}^2+\frac{\kappa\bar{\sigma}^2}{2\bar{\kappa}(\kappa-\bar{\kappa})}-\frac{\bar{\sigma}\{(\kappa-\bar{\kappa})\bar{\rho}_1\sigma-\kappa\bar{\sigma}\}}{(\kappa-\bar{\kappa})(\kappa+\bar{\kappa})}\right\}a_{12}\\
&\quad-\frac{1}{2}\left\{\bar{r}^2+\frac{\kappa^2\bar{\sigma}^2}{2\bar{\kappa}(\kappa-\bar{\kappa})^2}+\frac{(\kappa-\bar{\kappa})^2\sigma^2+\kappa^2\bar{\sigma}^2-2\kappa(\kappa-\bar{\kappa})\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}}{2\kappa(\kappa-\bar{\kappa})^2}+\frac{2\kappa\bar{\sigma}\{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma\bar{\rho}_1-\kappa\bar{\sigma}\}}{(\kappa-\bar{\kappa})(\kappa+\bar{\kappa})}\right\}a_{22}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

証明. 補論 A.2 参照。 □

近似偏微分方程式 (3.4) の解に基づく近似値関数及び近似最適制御をそれぞれ $\tilde{V},\tilde{u}^*=(\tilde{c}^*,\tilde{\Psi}_1^*,\tilde{\Psi}_2^*)$ と定義する。

3.2 近似解析解の候補

金利・平均金利の 2 変数関数 (3.5) に偏微分を施し、偏微分方程式 (3.4) に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\Big(a_{11}+\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)^2\Big)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\Big(a_{22}+\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)^2\Big)\\
&\qquad+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\Big(a_{12}+\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\Big)\\
&+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big\{\sigma^2\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)^2+\bar{\sigma}^2\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)^2+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\Big\}\\
&\qquad+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\ \big(\lambda_1+\lambda_{11}r_t+\lambda_{12}\bar{r}_t\big)\right)\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\\
&\qquad+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\right)\\
&\qquad-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)^2+\frac{\gamma-1}{\gamma}r_t+\frac{\beta}{\gamma}-h_0\right)\\
&\qquad-h_1\left(a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right)=0 \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

上式は $(r_t^2,\bar{r}_t^2,r_t\bar{r}_t,r_t,\bar{r}_t)$ に関する恒等式であるから、$(r_t^2,\bar{r}_t^2,r_t\bar{r}_t,r_t,\bar{r}_t)$ の各係数と定数項を順に整理すると、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22},h_0,h_1)$ に関する次の連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_{11}^2+2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{11}a_{12}+\bar{\sigma}^2a_{12}^2\Big)-(h_1+2\kappa)a_{11}\\
&\qquad+\frac{1}{\gamma+\delta}\left\{2(\gamma+\delta-1)\big(\sigma\lambda_{11}a_{11}+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i1}a_{12}\big)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_{i1}^2\right\}=0 \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\bar{\sigma}^2a_{22}^2+2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{12}a_{22}+\sigma^2a_{12}^2\Big)-(h_1+2\bar{\kappa})a_{22}+2\kappa a_{12}\\
&\qquad+\frac{1}{\gamma+\delta}\left\{2(\gamma+\delta-1)\big(\sigma\lambda_{12}a_{12}+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i2}a_{22}\big)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_{i2}^2\right\}=0 \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_{11}a_{12}+\bar{\sigma}^2a_{12}a_{22}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_{11}a_{22}+a_{12}^2)\Big)+\kappa a_{11}-(h_1+\kappa+\bar{\kappa})a_{12}\\
&+\frac{1}{\gamma+\delta}\left[(\gamma+\delta-1)\Big\{\sigma\big(\lambda_{11}a_{12}+\lambda_{12}a_{11}\big)+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\big(\lambda_{i1}a_{22}+\lambda_{i2}a_{12}\big)\Big\}-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_{i1}\lambda_{i2}\right]=0 \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_1a_{11}+\bar{\sigma}^2a_2a_{12}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_1a_{12}+a_2a_{11})\Big)\\
&\qquad+\frac{(\gamma+\delta-1)\sigma\lambda_1}{\gamma+\delta}a_{11}+\left(\frac{(\gamma+\delta-1)\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i}{\gamma+\delta}+\bar{\kappa}\bar{r}\right)a_{12}-(h_1+\kappa)a_1\\
&\qquad+\frac{1}{\gamma+\delta}\left\{(\gamma+\delta-1)\big(\sigma\lambda_{11}a_1+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i1}a_2\big)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\lambda_{i1}\right\}-\frac{\gamma-1}{\gamma}=0 \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_1a_{12}+\bar{\sigma}^2a_2a_{22}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_1a_{22}+a_2a_{12})\Big)\\
&\qquad+\frac{(\gamma+\delta-1)\sigma\lambda_1}{\gamma+\delta}a_{12}+\left(\frac{(\gamma+\delta-1)\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i}{\gamma+\delta}+\bar{\kappa}\bar{r}\right)a_{22}+\kappa a_1-(h_1+\bar{\kappa})a_2\\
&\qquad+\frac{1}{\gamma+\delta}\left\{(\gamma+\delta-1)\big(\sigma\lambda_{12}a_1+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i2}a_2\big)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\lambda_{i2}\right\}=0 \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}a_{11}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}a_{22}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{12}+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_1^2+\bar{\sigma}^2a_2^2\Big)+\left(1+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\right)\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_1a_2$$
$$+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\left(\lambda_1a_1+\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_ia_2\right)-h_1a_0+h_0+\frac{1-\gamma}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2-\frac{\beta}{\gamma}=0 \quad (3.16)$$

(3.2) 式を (3.16) 式に代入し h_0 を消去した後、(3.9) 式を (3.10) に代入し h_1 を消去すると、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22})$ の 6 元連立非線形方程式が導出される。但し、同連立方程式は一般に解が複数存在するので、これらの複数の解は最適解の候補に過ぎない。最適解の十分条件は次章で示す。

値関数を構成する金利関数が近似偏微分方程式 (3.4) の解として近似されている場合の値関数、最適消費、最適投資をそれぞれ「近似値関数」、「近似最適消費」、「近似最適投資比率」と呼び、それぞれ $\tilde{V},\tilde{c}^*,\tilde{\Psi}^*$ と表記する。このとき、次の命題を得る。

命題 2. 仮定 *1-3* の下、本問題 *(2.10)* の近似値関数、近似最適消費、近似最適投資比率は次を満たしている。

$$\tilde{V}(W_t,r_t,\bar{r}_t)=\exp\left[\gamma\left\{a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$\tilde{c}_t^*=\exp\left[-a_0-a_1r_t-a_2\bar{r}_t-\frac{1}{2}a_{11}r_t^2-a_{12}r_t\bar{r}_t-\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right]W_t$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{1t}^* &= \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{1t}+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\Big(\sigma a_1+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_2\Big)-\Big(\sigma a_{11}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{12}\Big)r_t-\Big(\sigma a_{12}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{22}\Big)\bar{r}_t\right)\\ \tilde{\Psi}_{2t}^* &= \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{2t}+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\Big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\Big)\right)\end{aligned}$$

ここで、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22})$ は上記 *6* 元連立方程式の解である。

4 最適解の十分条件

上記 6 元連立非線形方程式の解は一般に非最適解を含めて複数存在する。本章では、Maslowski and Veverka (2013) の議論を応用して最適解の十分条件を導出する。

4.1 一般化 Hamiltonian 関数

Maslowski and Veverka (2013) では、無限時間までの時点効用関数の割引現在価値を最大化する問題の十分条件を導出している。しかし、本問題 (2.10) は最小最大化問題である為、彼等の議論を本問題に直接適用することは出来ない。そこで、本問題の最悪確率導出（効用最小化）後の HJB 方程式 (2.18) と同一の HJB 方程式を導く次の最大化問題を考察する。

$$V(X_0)=\sup_{u\in\mathcal{B}(X_0)}E\left[\int_0^{\infty}e^{-\beta t}f(X_t,u_t)dt\right] \quad (4.1)$$

ここで、

$$f(X_t,u_t)=\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\left\{\Big(\Psi_{1t}W_tV_W-\sigma V_r-\bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\Big)^2+\Big(\Psi_{2t}W_tV_W-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\Big)^2\right\} \quad (4.2)$$

Maslowski and Veverka (2013) で定義されている一般化 Hamitonian 関数の表記法に揃えて、状態変数の SDE を次のように表現する。

$$dX_t=b(X_t,u_t)\,dt+\Sigma(X_t,u_t)\,dz_t \quad (4.3)$$

ここで、

$$b(X_t,u_t) = \begin{pmatrix} \big(A_t r_t + B_t \bar{r}_t + C_t\big)W_t - c_t \\ \kappa(\bar{r}_t - r_t) \\ \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t) \end{pmatrix} \qquad \Sigma(X_t,u_t) = \begin{pmatrix} \Psi_{1t}W_t & \Psi_{2t}W_t \\ -\sigma & 0 \\ \bar{\rho}_1\bar{\sigma} & \bar{\rho}_2\bar{\sigma} \end{pmatrix} \qquad z_t = \begin{pmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{pmatrix}$$

ここで、

$$A = 1 + \lambda_{11}\Psi_{1t} + \lambda_{12}\Psi_{2t} \tag{4.4}$$

$$B = \lambda_{21}\Psi_{1t} + \lambda_{22}\Psi_{2t} \tag{4.5}$$

$$C = \lambda_1\Psi_{1t} + \lambda_2\Psi_{2t} \tag{4.6}$$

また、補助変-数を

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{11} & \tilde{y}_{12} \\ \tilde{y}_{21} & \tilde{y}_{22} \\ \tilde{y}_{31} & \tilde{y}_{32} \end{pmatrix}$$

と表記すると、最適化問題 (4.1) の一般化 Hamiltonian 関数 $\mathcal{H}$ は次式で定義される。

$$\mathcal{H}(x,u,y,\tilde{y}) = \langle b(x,u), y\rangle + \mathrm{Tr}(\Sigma'\tilde{y}) + f(x,u) - \beta\langle x,y\rangle \tag{4.7}$$

ここで、$\langle a,b\rangle$ は a と b の内積を表す。

従って、最適化問題 (4.1) の一般化 Hamiltonian 関数は次式で表される。

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(X_t,u_t,y,\tilde{y}) &= y_1\left\{(A\,r_t + B\,\bar{r}_t + C\,)\,W_t - c_t\right\} + y_2\big\{\kappa(\bar{r}_t - r_t) - \beta r_t\big\} + y_3\big\{\bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t) - \beta\bar{r}_t\big\} \\ &\quad + \tilde{y}_{11}\Psi_{1t}W_t - \tilde{y}_{21}\sigma - \tilde{y}_{31}\bar{\rho}_1\bar{\sigma} + \tilde{y}_{12}\Psi_{2t}W_t - \tilde{y}_{32}\bar{\rho}_2\bar{\sigma} + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\big(D^2 + E^2\big)\end{aligned} \tag{4.8}$$

ここで、

$$D = \Psi_1 W V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}} \tag{4.9}$$

$$E = \Psi_2 W V_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}} \tag{4.10}$$

4.2 補助変数及び制御変数の最適解

制御変数 u の最適解は一般化ハミルトニアン関数の 1 階の条件から導出されるが、HJB 方程式との整合性から同解が HJB 方程式から導かれる最適解、すなわち、(2.19)-(2.21) 式を満たす $u^* = (c^*, \Psi_1^*, \Psi_2^*)$ と一致する必要がある。補助変数 $(y,\tilde{y})$ が次式を満たす場合に制御変数の最適解が $u^* = (c^*, \Psi_1^*, \Psi_2^*)$ と一致することが示される。

$$\begin{aligned} y^* &= \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_W \\ V_r \\ V_{\bar{r}} \end{pmatrix} \\ \tilde{y}^* &= \begin{pmatrix} \tilde{y}_{11}^* & \tilde{y}_{12}^* \\ \tilde{y}_{21}^* & \tilde{y}_{22}^* \\ \tilde{y}_{31}^* & \tilde{y}_{32}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{Wr} & V_{W\bar{r}} \\ V_{Wr} & V_{rr}V_{W\bar{r}} & \\ V_{W\bar{r}} & V_{r\bar{r}} & V_{\bar{r}\bar{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{1t}W_t & \Psi_{2t}W_t \\ -\sigma & 0 \\ -\bar{\rho}_1\bar{\sigma} & -\bar{\rho}_2\bar{\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Psi_{1t}W_tV_{WW} - \sigma V_{Wr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{W\bar{r}} & \Psi_{2t}W_tV_{WW} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{W\bar{r}} \\ \Psi_{1t}W_tV_{Wr} - \sigma V_{rr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{r\bar{r}} & \Psi_{2t}W_tV_{Wr} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{r\bar{r}} \\ \Psi_{1t}W_tV_{W\bar{r}} - \sigma V_{r\bar{r}} - \bar{\rho}_1\ bsigma V_{\bar{r}\bar{r}} & \Psi_{2t}W_tV_{W\bar{r}} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}\bar{r}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.3　最適解の十分条件

一般化 Hamiltonian 関数 $\mathcal{H}$ の Hessian H を次式のように定め、

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{WW} & \mathcal{H}_{Wr} & \mathcal{H}_{W\bar{r}} & \mathcal{H}_{Wc} & \mathcal{H}_{W\Psi_1} & \mathcal{H}_{W\Psi_2} \\ \mathcal{H}_{rW} & \mathcal{H}_{rr} & \mathcal{H}_{r\bar{r}} & \mathcal{H}_{rc} & \mathcal{H}_{r\Psi_1} & \mathcal{H}_{r\Psi_2} \\ \mathcal{H}_{\bar{r}W} & \mathcal{H}_{\bar{r}r} & \mathcal{H}_{\bar{r}\bar{r}} & \mathcal{H}_{\bar{r}c} & \mathcal{H}_{\bar{r}\Psi_1} & \mathcal{H}_{\bar{r}\Psi_2} \\ \mathcal{H}_{cW} & \mathcal{H}_{cr} & \mathcal{H}_{c\bar{r}} & \mathcal{H}_{cc} & \mathcal{H}_{c\Psi_1} & \mathcal{H}_{c\Psi_2} \\ \mathcal{H}_{\Psi_1 W} & \mathcal{H}_{\Psi_1 r} & \mathcal{H}_{\Psi_1\bar{r}} & \mathcal{H}_{\Psi_1 c} & \mathcal{H}_{\Psi_1\Psi_1} & \mathcal{H}_{\Psi_1\Psi_2} \\ \mathcal{H}_{\Psi_2 W} & \mathcal{H}_{\Psi_2 r} & \mathcal{H}_{\Psi_2\bar{r}} & \mathcal{H}_{\Psi_2 c} & \mathcal{H}_{\Psi_2\Psi_1} & \mathcal{H}_{\Psi_2\Psi_2} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

H の始めの k 行 k 列までの要素から成る行列を H_k と表記する。

このとき、Maslowski and Veverka (2014) Theorem 4 の正則条件の下で、$u^* = (c^*, \Psi_1^*, \Psi_2^*)$ が最適解である為の十分条件は、$(x, u) \to \mathcal{H}(x, u, y^*, \tilde{y}^*)$ が凹関数である、すなわち、$\det \mathsf{H}_1(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) < 0,\ \det \mathsf{H}_2(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) > 0,\ \det \mathsf{H}_3(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) < 0,\ \det \mathsf{H}_4(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) > 0,\ \det \mathsf{H}_5(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) < 0,\ \det \mathsf{H}_6(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) > 0$ であることが示される。ここで、H の要素は次のように表される。尚、一般化 Hamiltonian 関数の 1 階偏微分については、補論 A.3 を参照せよ。

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{WW} = -\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\Bigg\{&\frac{2V_W^2 - VV_{WW}}{V^3}\left(D^2+E^2\right) - \frac{4V_W}{V^2}\left(DD_W + EE_W\right) \\ &+ \frac{2}{V}\left(D_W^2 + DD_{WW} + E_W^2 + EE_{WW}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{Wr} = y_1 A - \frac{\delta}{2(1-\gamma)}\Bigg\{&\frac{2V_W V_r - VV_{Wr}}{V^3}\left(D^2+E^2\right) - \frac{2V_W}{V^2}\left(DD_r + EE_r\right) \\ &- \frac{2V_r}{V^2}\left(DD_W + EE_W\right) + \frac{2}{V}\left(D_r D_W + DD_{Wr} + E_r E_W + EE_{Wr}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{W\bar{r}} = y_1 B \frac{\delta}{2(1-\gamma)}\Bigg\{&\frac{2V_W V_{\bar{r}} - VV_{W\bar{r}}}{V^3}(D^2+E^2) - \frac{2V_W}{V^2}\left(DD_{\bar{r}} + EE_{\bar{r}}\right) \\ &- \frac{2V_{\bar{r}}}{V^2}\left(DD_W + EE_W\right) + \frac{2}{V}\left(D_{\bar{r}} D_W + DD_{W\bar{r}} + E_{\bar{r}} E_W + EE_{W\bar{r}}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\mathcal{H}_{Wc} = 0 \tag{4.15}$$

$$\mathcal{H}_{W\Psi_1} = y_1\left(A_{\Psi_1} r_t + B_{\Psi_1}\bar{r}_t + C_{\Psi_1}\right) + \tilde{Y}_{11} - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_W}{V^2} DD_{\Psi_1} + \frac{1}{V}\left(D_{\Psi_1} D_W + DD_{W\Psi_1}\right)\right\} \tag{4.16}$$

$$\mathcal{H}_{W\Psi_2} = y_1\left(A_{\Psi_2} r_t + B_{\Psi_2}\bar{r}_t + C_{\Psi_2}\right) + \tilde{Y}_{12} - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_W}{V^2} EE_{\Psi_2} + \frac{1}{V}\left(E_{\Psi_2} E_W + EE_{W\Psi_2}\right)\right\} \tag{4.17}$$

$$\mathcal{H}_{rr} = -\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{\frac{2V_r^2 - VV_{rr}}{V^3}\left(D^2+E^2\right) - \frac{4V_r}{V^2}\left(DD_r + EE_r\right) + \frac{2}{V}\left(D_r^2 + DD_{rr} + E_r^2 + EE_{rr}\right)\right\} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{r\bar{r}} = -\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\Bigg\{&\frac{2V_r V_{\bar{r}} - VV_{r\bar{r}}}{V^3}\left(D^2+E^2\right) \\ &- \frac{2V_r}{V^2}\left(DD_{\bar{r}} + EE_{\bar{r}}\right) - \frac{2V_{\bar{r}}}{V^2}\left(DD_r + EE_r\right) + \frac{2}{V}\left(D_r D_{\bar{r}} + DD_{r\bar{r}} + E_r E_{\bar{r}} + EE_{r\bar{r}}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\mathcal{H}_{rc} = 0 \tag{4.20}$$

$$\mathcal{H}_{r\Psi_1} = y_1 A_{\Psi_1} W_t - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_r}{V^2} DD_{\Psi_1} + D_{\Pi_1} D_r + DD_{r\Psi_1}\right\} \tag{4.21}$$

$$\mathcal{H}_{r\Psi_2} = y_1 A_{\Psi_2} W_t - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_r}{V^2} EE_{\Psi_2} + E_{\Pi_2} E_r + EE_{r\Psi_2}\right\} \tag{4.22}$$

$$\mathcal{H}_{\bar{r}\bar{r}} = -\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{\frac{2V_{\bar{r}}^2 - VV_{\bar{r}\bar{r}}}{V^3}\big(D^2+E^2\big) - \frac{4V_{\bar{r}}}{V^2}\big(DD_{\bar{r}}+EE_{\bar{r}}\big) + \frac{2}{V}\big(D_{\bar{r}}^2 + DD_{\bar{r}\bar{r}} + E_{\bar{r}}^2 + EE_{\bar{r}\bar{r}}\big)\right\} \tag{4.23}$$

$$\mathcal{H}_{\bar{r}c} = 0 \tag{4.24}$$

$$\mathcal{H}_{\bar{r}\Psi_1} = y_1 B_{\Psi_1} W_t - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_{\bar{r}}}{V^2}DD_{\Psi_1} + D_{\Pi_1}D_{\bar{r}} + DD_{\bar{r}\Psi_1}\right\} \tag{4.25}$$

$$\mathcal{H}_{\bar{r}\Psi_2} = y_1 B_{\Psi_2} W_t - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_{\bar{r}}}{V^2}EE_{\Psi_2} + E_{\Pi_2}E_{\bar{r}} + EE_{\bar{r}\Psi_2}\right\} \tag{4.26}$$

$$\mathcal{H}_{cc} = -\gamma c_t^{-(\gamma+1)}, \qquad \mathcal{H}_{c\Psi_1} = 0, \qquad \mathcal{H}_{c\Psi_2} = 0 \tag{4.27}$$

$$\mathcal{H}_{\Psi_1\Psi_1} = -\frac{\delta}{(1-\gamma)V}D_{\Psi_1}^2, \qquad \mathcal{H}_{\Psi_1\Psi_2} = 0, \qquad \mathcal{H}_{\Psi_2\Psi_2} = -\frac{\delta}{(1-\gamma)V}E_{\Psi_2}^2 \tag{4.28}$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} A_{\Psi_1} & A_{\Psi_2} \\ B_{\Psi_1} & B_{\Psi_2} \\ C_{\Psi_1} & C_{\Psi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$D_W = \Psi_1\big(V_W + WV_{WW}\big) - \sigma V_{Wr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{W\bar{r}}, \qquad E_W = \Psi_2\big(V_W + WV_{WW}\big) - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{W\bar{r}}$$

$$D_{WW} = \Psi_1\big(2V_W + WV_{WWW}\big) - \sigma V_{WWr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{WW\bar{r}}, \qquad E_{WW} = \Psi_2\big(2V_W + WV_{WWW}\big) - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{WW\bar{r}}$$

$$D_r = \Psi_1 WV_{Wr} - \sigma V_{rr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{r\bar{r}}, \qquad E_r = \Psi_2 WV_{Wr} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{r\bar{r}}$$

$$D_{Wr} = \Psi_1\big(V_{Wr} + WV_{WWr}\big) - \sigma V_{Wrr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{Wr\bar{r}}, \qquad E_{Wr} = \Psi_2\big(V_{Wr} + WV_{WWr}\big) - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{Wr\bar{r}}$$

$$D_{\bar{r}} = \Psi_1 WV_{W\bar{r}} - \sigma V_{r\bar{r}} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}\bar{r}}, \qquad E_{\bar{r}} = \Psi_2 WV_{W\bar{r}} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}\bar{r}}$$

$$D_{W\bar{r}} = \Psi_1\big(V_{W\bar{r}} + WV_{WW\bar{r}}\big) - \sigma V_{Wr\bar{r}} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{W\bar{r}\bar{r}}, \qquad E_{W\bar{r}} = \Psi_2\big(V_{W\bar{r}} + WV_{WW\bar{r}}\big) - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{W\bar{r}\bar{r}}$$

$$\begin{pmatrix} D_{\Psi_1} & D_{\Psi_2} \\ E_{\Psi_1} & E_{\Psi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WV_W & 0 \\ 0 & WV_W \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} D_{W\Psi_1} & D_{W\Psi_2} \\ E_{W\Psi_1} & E_{W\Psi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_W + WV_{WW} & 0 \\ 0 & V_W + WV_{WW} \end{pmatrix}$$

$$D_{rr} = \Psi_1 WV_{Wrr} - \sigma V_{rrr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{rr\bar{r}}, \qquad E_{rr} = \Psi_2 WV_{Wrr} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{rr\bar{r}}$$

$$D_{\bar{r}\bar{r}} = \Psi_1 WV_{W\bar{r}\bar{r}} - \sigma V_{r\bar{r}\bar{r}} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}\bar{r}\bar{r}}, \qquad E_{\bar{r}\bar{r}} = \Psi_2 WV_{W\bar{r}\bar{r}} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}\bar{r}\bar{r}}$$

$$D_{r\bar{r}} = \Psi_1 WV_{Wr\bar{r}} - \sigma V_{rr\bar{r}} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{r\bar{r}\bar{r}}, \qquad E_{r\bar{r}} = \Psi_2 WV_{Wr\bar{r}} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{r\bar{r}\bar{r}}$$

$$\begin{pmatrix} D_{r\Psi_1} \\ E_{r\Psi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WV_{Wr} \\ WV_{Wr} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} D_{\bar{r}\Psi_1} \\ E_{\bar{r}\Psi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WV_{W\bar{r}} \\ WV_{W\bar{r}} \end{pmatrix}$$

参考文献

[1] Anderson, E. W., L. P. Hansen, and T. J. Sargent (2003) "A Quartet of Semi-groups for Model Specification, Robustness, Prices of Risk, and Model Detection," *Journal of the European Economic Association*, 1, 68-123.

[2] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2002) *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, NY.

[3] Duffee, G. R. (2002) "Term Premia and Interest Forecast in Affine Models," *Journal of Finance*, 57, 405-43

[4] Duffie, D. and R. Kan (2002) "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, 6, 379-406.

[5] Hull, J. C. and A. White (1994) “Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two Factor Models,” *Journal of Derivatives*, 2, 37-48.

[6] Knight, F. H. (1921) *Risk, Uncertainty, and Profit*, Boston: Houghton Mifflin.

[7] Maenhout, P. J. (2004) “Robust Portfolio Rules and Asset Pricing,” *The Review of Financial Studies* 17, 4, 951-84.

[8] Maslowski, B. and P. Veverka (2014) “Sufficient Stochastic Maximum Principle for Discounted Control Problem,” *Applied Mathematics and Optimization*, 70, .225-52.

[9] Skiadas, C. (2003) “Robust Cotrol and Recursive Utility,” *Finance and Stochastics* 7, 475-89.

[10] 楠田浩二 (2013)「相似拡大的頑健効用と 2 ファクター金利モデルに基づく消費と株式・債券投資の多期間最適化問題における 2 種類の近似解析解」 Discussion Paper J-40、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

A 証明

A.1 補題 3 の証明

次のように記法を定める。

$$X_t = \begin{pmatrix} r_t \\ \bar{r}_t \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \kappa & -\kappa \\ 0 & \bar{\kappa} \end{pmatrix} \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{r} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \bar{\rho}_1\bar{\sigma} & \bar{\rho}_2\bar{\sigma} \end{pmatrix} \qquad Z_t = -\begin{pmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{pmatrix}$$

このとき、金利の SDE(2.1) 式は次ように書き改められる。

$$dX_t = A(\bar{X} - X_t)dt + \Sigma\, dZ_t$$

よって、

$$d(e^{At}X_t) = e^{At}(AX_t dt + dX_t) = e^{At}(A\,\bar{X}\,dt + \Sigma\,dZ_t) = A\,e^{At}\bar{X}\,dt + e^{At}\Sigma\,dZ_t$$

上式の両辺を 0 から t まで積分すると、

$$e^{At}X_t - X_0 = A\left(\int_0^t e^{As}ds\right)\theta + \left(\int_0^t e^{As}\Sigma\,dZ_s\right)$$

従って、

$$X_t = e^{-At}X_0 + A\,e^{-At}\int_0^t e^{As}ds\,\bar{X} + \int_0^t e^{As}\Sigma\,dZ_s \tag{A.1}$$

次に、e^{At} 及び e^{-At} を具体的に計算する。先ず、A の固有値、固有ベクトルは、

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \kappa\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\kappa-\bar{\kappa}} \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{\kappa}\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\kappa-\bar{\kappa}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$A = P\begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \bar{\kappa} \end{pmatrix}P^{-1}$$

ここで、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\kappa}{\kappa-\bar{\kappa}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに、

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= P\begin{pmatrix} e^{\kappa t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\kappa t}\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\kappa t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\kappa t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa} \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\kappa t} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}e^{\bar\kappa t} \\ 0 & e^{\bar\kappa t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa} \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\kappa t} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{\bar\kappa t}-e^{\kappa t}\right) \\ 0 & e^{\bar\kappa t}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e^{-At} は e^{At} の逆行列なので、

$$
e^{-At} = e^{-(\kappa+\bar\kappa)}\begin{pmatrix} e^{\bar\kappa t} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{\kappa t}-e^{\bar\kappa t}\right) \\ 0 & e^{\kappa t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\kappa t} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{-\bar\kappa t}-e^{-\kappa t}\right) \\ 0 & e^{-\bar\kappa t}\end{pmatrix}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
e^{-At}\int_0^t e^{As}ds &= e^{-At}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{\kappa s} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right) \\ 0 & e^{\bar\kappa s}\end{pmatrix}ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{-\kappa t} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{-\bar\kappa t}-e^{-\kappa t}\right) \\ 0 & e^{-\bar\kappa t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}\left(e^{\kappa t}-1\right) & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left\{\frac{1}{\bar\kappa}\left(e^{\bar\kappa t}-1\right)-\frac{1}{\bar\kappa}\left(e^{\kappa t}-1\right)\right\} \\ 0 & \frac{1}{\bar\kappa}\left(e^{\bar\kappa t}-1\right)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right) & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left\{\frac{1}{\kappa}\left(e^{(\bar\kappa-\kappa)t}-e^{-\kappa t}\right)-\frac{1}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right)\right\}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\frac{1}{\bar\kappa}\left(1-e^{-\bar\kappa t}-e^{(\bar\kappa-\kappa)t}+e^{-\kappa t}\right) \\ 0 & \frac{1}{\bar\kappa}\left(1-e^{-\bar\kappa t}\right)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right) & \frac{1}{\kappa-\bar\kappa}\left\{\frac{\kappa}{\bar\kappa}\left(1-e^{-\bar\kappa t}\right)-\left(1-e^{-\kappa t}\right)\right\} \\ 0 & \frac{1}{\bar\kappa}\left(1-e^{-\bar\kappa t}\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ゆえに、

$$
\begin{aligned}
A\,e^{-At}\int_0^t e^{As}ds\,\bar X &= \begin{pmatrix} \kappa & -\kappa \\ 0 & \bar\kappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right) & \frac{1}{\kappa-\bar\kappa}\left\{\frac{\kappa}{\bar\kappa}\left(1-e^{-\bar\kappa t}\right)-\left(1-e^{-\kappa t}\right)\right\} \\ 0 & \frac{1}{\bar\kappa}\left(1-e^{-\bar\kappa t}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar r \\ \bar r\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-e^{-\kappa t} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left\{\frac{\kappa}{\bar\kappa}\left(1-e^{-\bar\kappa t}\right)-\left(1-e^{-\kappa t}\right)\right\}-\frac{\kappa}{\bar\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right) \\ 0 & 1-e^{-\bar\kappa t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar r \\ \bar r\end{pmatrix} \\
&= \bar r\begin{pmatrix} 1-e^{-\kappa t}+\frac{\kappa}{\bar\kappa}\left(1-e^{-\bar\kappa t}\right)\left(\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}-1\right)-\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right) \\ 1-e^{-\bar\kappa t}\end{pmatrix} \\
&= \bar r\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(1-e^{-\bar\kappa t}\right)-\frac{\bar\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right) \\ 1-e^{-\bar\kappa t}\end{pmatrix} \\
&= \bar r\begin{pmatrix} 1+\frac{\bar\kappa}{\kappa-\bar\kappa}e^{-\kappa t}-\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}e^{-\bar\kappa t} \\ 1-e^{-\bar\kappa t}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

上式を (A.1) 式に代入し、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
X_t &= \begin{pmatrix} e^{-\kappa t} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{-\bar\kappa t}-e^{\kappa t}\right) \\ 0 & e^{-\bar\kappa t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_0 \\ \bar r_0\end{pmatrix}+\bar r\begin{pmatrix} 1+\frac{\bar\kappa}{\kappa-\bar\kappa}e^{-\kappa t}-\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}e^{-\bar\kappa t} \\ 1-e^{-\bar\kappa t}\end{pmatrix}+e^{-At}\int_0^t e^{As}dZ_s\Sigma \\
&= \begin{pmatrix} e^{-\kappa t}\bar r_0+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{-\bar\kappa t}-e^{-\kappa t}\right)\bar r_0+\bar r+\bar r\frac{\bar\kappa}{\kappa-\bar\kappa}e^{-\kappa t}-\bar r\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}e^{-\bar\kappa t} \\ e^{-\bar\kappa t}\left(\bar r_0-\bar r\right)+\bar r\end{pmatrix}+e^{-At}\int_0^t e^{As}dZ_s\Sigma \\
&= \begin{pmatrix} e^{-\kappa t}\left(r_0-\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar r_0+\frac{\bar\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar r\right)+e^{-\bar\kappa t}\left(\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(\bar r_0-\bar r\right)\right)+\bar r \\ e^{-\bar\kappa t}\left(\bar r_0-\bar r\right)+\bar r\end{pmatrix}+e^{-At}\int_0^t e^{As}dZ_s\Sigma \quad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

ここで、伊藤積分の項は、

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{As}\Sigma\,dZ_s &= -\int_0^t \begin{pmatrix} e^{\kappa s} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right) \\ 0 & e^{\bar\kappa s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma & 0 \\ \bar\rho_1\bar\sigma & \bar\rho_2\bar\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dz_{1s} \\ dz_{2s}\end{pmatrix} \\
&= -\int_0^t \begin{pmatrix} \sigma e^{\kappa s}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_1\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right) & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_2\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right) \\ \bar\rho_1\bar\sigma e^{\bar\kappa s} & \bar\rho_2\bar\sigma e^{\bar\kappa s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dz_{1s} dz_{2s}\end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \int_0^t\left\{\sigma e^{\kappa s}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_1\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right)\right\}dz_{1s}+\int_0^t\left\{\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_2\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right)\right\}dz_{2s} \\ \int_0^t\bar\rho_1\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{1s}+\int_0^t\bar\rho_2\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{2s}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
& e^{-At}\int_0^t e^{As}\Sigma\,dZs \\
&= -\begin{pmatrix} e^{-\kappa t} & \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{-\bar\kappa t}-e^{-\kappa t}\right) \\ 0 & e^{-\bar\kappa t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \int_0^t\left\{\sigma e^{\kappa s}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_1\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right)\right\}dz_{1s}+\int_0^t\left\{\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_2\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right)\right\}dz_{2s} \\ \int_0^t\bar\rho_1\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{1s}+\int_0^t\bar\rho_2\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{2s}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-\kappa t}\int_0^t\left\{\sigma e^{\kappa s}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_1\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right)\right\}dz_{1s}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{-\bar\kappa t}-e^{-\kappa t}\right)\int_0^t\bar\rho_1\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{1s} \\ +e^{-\kappa t}\int_0^t\left\{\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_2\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right)\right\}dz_{2s}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{-\bar\kappa t}-e^{-\kappa t}\right)\int_0^t\bar\rho_2\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{2s} \\ e^{-\bar\kappa t}\int_0^t\bar\rho_1\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{1s}+e^{-\kappa t}\int_0^t\bar\rho_2\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{2s}\end{pmatrix} \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
& e^{-\kappa t}\int_0^t\left\{\sigma e^{\kappa s}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_1\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right)\right\}dz_{1s}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{-\bar\kappa t}-e^{-\kappa t}\right)\int_0^t\bar\rho_1\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{1s} \\
&= \frac{\kappa\bar\rho_1\bar\sigma}{\kappa}\int_0^t\left\{\left(e^{\bar\kappa s-\kappa t}-e^{\kappa(s-t)}+e^{\bar\kappa(s-t)}-e^{\bar\kappa s-\kappa t}\right)+\frac{\kappa-\bar\kappa}{\kappa\bar\rho_1\bar\sigma}\sigma e^{\kappa(s-t)}\right\}dz_{1s} \\
&= \frac{\kappa\bar\rho_1\bar\sigma}{\kappa}\int_0^t\left(e^{\bar\kappa(s-t)}+\frac{(\kappa-\bar\kappa)\sigma-\kappa\bar\rho_1\bar\sigma}{\kappa\bar\rho_1\bar\sigma}e^{\kappa(s-t)}\right)dz_{1s} \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\kappa t}\int_0^t\left\{\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_2\bar\sigma\left(e^{\bar\kappa s}-e^{\kappa s}\right)\right\}dz_{2s}+\frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\left(e^{-\bar\kappa t}-e^{-\kappa t}\right)\int_0^t\bar\rho_2\bar\sigma e^{\bar\kappa s}dz_{2s} \\
&= \frac{\kappa}{\kappa-\bar\kappa}\bar\rho_2\bar\sigma\int_0^t\left(e^{\bar\kappa s-\kappa t}-e^{\kappa(s-t)}+e^{\bar\kappa(s-t)}-e^{\bar\kappa s-\kappa t}\right)dz_{2s} \\
&= \frac{\kappa\bar\rho_2\bar\sigma}{\kappa-\bar\kappa}\int_0^t\left(e^{\bar\kappa(s-t)}-e^{\kappa(s-t)}\right)dz_{2s} \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

(A.4)(A.5) 式を (A.3) 式に代入し、その結果を (A.2) 式に代入すると、補題 3 の (3.7)(3.8) 式を得る。

A.2 補題 4 の証明

補題 3 の (3.7)(3.8) 式より、

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}E[r_t] &= \bar r \\
\lim_{t\to\infty}E[\bar r_t] &= \bar r \\
\lim_{t\to\infty}E[\bar r_t^2] &= \bar r^2+\lim_{t\to\infty}\bar\rho_1^2\bar\sigma^2\int_0^t e^{2\bar\kappa(s-t)}ds+\lim_{t\to\infty}\left(1-\bar\rho_1^2\right)\bar\sigma^2\int_0^t e^{2\bar\kappa(s-t)}ds \\
&= \bar r^2+\lim_{t\to\infty}\frac{\bar\sigma^2}{2\bar\kappa}\left(1-e^{-2\bar\kappa t}\right) \\
&= \bar r^2+\frac{\bar\sigma^2}{2\bar\kappa}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} E[\bar{r}_t^2] \\
&= \bar{r}^2 + \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\right)^2 \int_0^t \left\{ e^{2\bar{\kappa}(s-t)} + \left(\frac{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma-\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}\right)^2 e^{2\kappa(s-t)} + \frac{2\{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma-\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}\}}{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}} e^{(\kappa+\bar{\kappa})(s-t)} \right\} ds \\
&\qquad + \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\kappa\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\right)^2 \int_0^t \left\{ e^{2\bar{\kappa}(s-t)} + e^{2\kappa(s-t)} - 2e^{(\kappa+\bar{\kappa})(s-t)} \right\} ds
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e^{2\bar{\kappa}(s-t)} ds &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\bar{\kappa}}\left(1-e^{-2\bar{\kappa}t}\right) = \frac{1}{2\bar{\kappa}} \\
\lim_{t\to\infty} e^{2\kappa(s-t)} ds &= \frac{1}{2\kappa} \\
\lim_{t\to\infty} e^{(\kappa+\bar{\kappa})(s-t)} ds &= \frac{1}{\kappa+\bar{\kappa}}
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} E[\bar{r}_t^2] &= \bar{r}^2 + \left(\frac{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2\bar{\kappa}} + \left(\frac{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma-\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}\right)^2 \frac{1}{2\kappa} + \frac{2\{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma-\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}\}}{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}} \frac{1}{\kappa+\bar{\kappa}} \right\} \\
&\quad + \left(\frac{\kappa\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\right)^2 \left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} + \frac{1}{2\kappa} - \frac{2}{\kappa+\bar{\kappa}}\right) \\
&= \bar{r}^2 + \left(\frac{\kappa\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\right)^2 \frac{1}{2\bar{\kappa}} + \frac{1}{2\kappa}\frac{1}{(\kappa-\bar{\kappa})^2}\left\{(\kappa-\bar{\kappa})^2\sigma^2 + \kappa^2\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}^2 - 2(\kappa-\bar{\kappa})\kappa\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma} + \kappa^2\left(1-\bar{\rho}_1^2\right)\bar{\sigma}^2\right\} \\
&\quad + \frac{2\kappa^2\bar{\sigma}^2}{(\kappa-\bar{\kappa})(\kappa+\bar{\kappa})}\left\{\bar{\rho}_1^2 - \frac{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma-\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}\left(1-\bar{\rho}_1^2\right)\right\} \\
&= \bar{r}^2 + \left(\frac{\kappa\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\right)^2 \frac{1}{2\bar{\kappa}} + \frac{1}{(\kappa-\bar{\kappa})^2}\frac{1}{2\kappa}\left\{(\kappa-\bar{\kappa})^2\sigma^2 + \kappa^2\bar{\sigma}^2 - 2(\kappa-\bar{\kappa})\kappa\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\right\} \\
&\quad + \frac{2\kappa^2\bar{\sigma}^2}{(\kappa-\bar{\kappa})(\kappa+\bar{\kappa})}\left\{\bar{\rho}_1^2 - \frac{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma-\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}\left(1-\bar{\rho}_1^2\right)\right\} \\
&= \bar{r}^2 + \left(\frac{\kappa\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\right)^2 \frac{1}{2\bar{\kappa}} + \frac{1}{(\kappa-\bar{\kappa})^2}\frac{1}{2\bar{\kappa}}\left\{(\kappa-\bar{\kappa})^2\sigma^2 + \kappa^2\bar{\sigma}^2 - 2(\kappa-\bar{\kappa})\kappa\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\right\} \\
&\quad + \frac{2\kappa\bar{\sigma}}{(\kappa-\bar{\kappa})(\kappa+\bar{\kappa})}\left\{(\kappa-\bar{\kappa})\bar{\rho}_1\sigma - \kappa\bar{\sigma}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} E[r_t\bar{r}_t] &= \bar{r}^2 + \lim_{t\to\infty}\frac{\kappa\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}^2}{\kappa-\bar{\kappa}} \int_0^t \left\{ e^{2\bar{\kappa}(s-t)} + \frac{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma-\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}} e^{(\kappa+\bar{\kappa})(s-t)} \right\} ds \\
&\quad + \lim_{t\to\infty}\frac{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa-\bar{\kappa}}\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\int_0^t \left(e^{2\bar{\kappa}(s-t)} - e^{(\kappa+\bar{\kappa})(s-t))}\right) ds \\
&= \bar{r}^2 + \frac{\kappa\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}^2}{\kappa-\bar{\kappa}}\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} + \frac{(\kappa-\bar{\kappa})\sigma-\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}\right)\frac{1}{\kappa+\bar{\kappa}} + \frac{\kappa\bar{\rho}_2^2\bar{\sigma}^2}{\kappa-\bar{\kappa}}\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} - \frac{1}{\kappa+\bar{\kappa}}\right) \\
&= \bar{r}^2 + \frac{\kappa}{2\bar{\kappa}}\frac{\bar{\sigma}^2}{\kappa-\bar{\kappa}} + \frac{\kappa\bar{\sigma}^2}{(\kappa-\bar{\kappa})(\kappa+\bar{\kappa})}\left(\frac{(\kappa-\bar{\kappa})\bar{\rho}_1\sigma - \kappa\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\sigma}} - \frac{(1-\bar{\rho}^2)\kappa\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\sigma}}\right) \\
&= \bar{r}^2 + \frac{\kappa\bar{\sigma}^2}{2\bar{\kappa}(\kappa-\bar{\kappa})} + \frac{\bar{\sigma}\{(\kappa-\bar{\kappa})\bar{\rho}_1\sigma - \kappa\bar{\sigma}\}}{(\kappa-\bar{\kappa})(\kappa+\bar{\kappa})}
\end{aligned}
$$

これらの結果を (3.6) 式に代入すると、補題 4 の (3.9) 式を得る。

A.3　一般化 Hamiltonian 関数の 1 階偏微分

$\mathcal{H}$ を (x,u) の各変数で偏微分すると以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_W &= y_1(A\,r_t + B\bar{r}_t + C - \beta) + \tilde{y}_{11}\Psi_1 + \tilde{y}_{12}\Psi_2 \\
&\quad -\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{-\frac{V_W}{V^2}\big(D^2+E^2\big) + \frac{2}{V}\big(DD_W + EE_W\big)\right\} \\
\mathcal{H}_r &= y_1 A W_t - y_2(\kappa+\beta) - \frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{-\frac{V_r}{V^2}\big(D^2+E^2\big) + \frac{2}{V}\big(DD_r + EE_r\big)\right\} \\
\mathcal{H}_{\bar{r}} &= y_1 B W_t + y_2\kappa - y_3(\bar{\kappa}+\beta) - \frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{-\frac{V_{\bar{r}}}{V^2}\big(D^2+E^2\big) + \frac{2}{V}\big(DD_{\bar{r}} + EE_{\bar{r}}\big)\right\} \\
\mathcal{H}_{\bar{r}} &= -y_1 + c_t^{-\gamma} \\
\mathcal{H}_{\Psi_1} &= y_1\big(A_{\Psi_1} r_t + B_{\Psi_1}\bar{r}_t + C_{\Psi_1}\big)W_t + \tilde{y}_{11}W_t - \frac{\delta}{(1-\gamma)V}DD_{\Psi_1} \\
\mathcal{H}_{\Psi_2} &= y_1\big(A_{\Psi_2} r_t + B_{\Psi_2}\bar{r}_t + C_{\Psi_2}\big)W_t + \tilde{y}_{12}W_t - \frac{\delta}{(1-\gamma)V}EE_{\Psi_1}
\end{aligned}
$$

これらを各変数で偏微分すると、(4.12)-(4.28) 式を得る。