

## 博士論文要旨

本研究は、現代日本経済の喫緊の課題であるリスク・マネーの創出機能と家計の資産形成機能の強化を企図したものであり、実用に耐える一般性の高い国際証券市場モデルの下、個人及び生保の証券投資の頑健最適化問題において、比較静学と実証分析を実現可能とすべく、最適投資の解析解、乃至は近似解析解を導出することを目的としている。本研究の結論は以下の通りである。

短期金利とリスクの市場価格が一般次元の潜在ファクター（状態変数）のアフィン関数である、一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルを導入し、同モデルの下での諸証券の無裁定収益率過程と予算制約式を導出した。予算制約式は、投資が大きくなるにつれて、富の実質収益率のリスクを高める一方、リスクの市場価格に比例して富の実質期待超過収益率を高めること、すなわち、リスクの市場価格は、全消費者共通の単位投資リスク当たりの対価であることを示した。

まず、CRRA 効用消費者の国内証券投資最適化問題を有限時間問題、無限時間問題の順に考察した。有限時間問題では、HJB 方程式から導出された間接効用関数の非斉次線形偏微分方程式に対し Liu(2007) の線形微分方程式を対象とする準解析解構成法を適用し、準解析解を導出し、最適消費と最適投資を算出した。同最適投資は、潜在ファクター（状態変数）の変化を考慮しない近視眼的需要項と同変化に保険を掛ける保険需要項の和として表されること、そして、近視眼的需要項は単位投資リスク当たりの対価を相対的危険許容度（相対的危険回避度の逆数）で重み付けられ、保険需要項は状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を「1- 相対的危険許容度」で重み付けられていることが再確認された。すなわち、最適投資比率は、単位投資リスク当たりの対価を相対的危険許容度で、状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を「1- 相対的危険許容度」で重み付けられた加重平均として表される。これは、相対的危険回避度が、単位投資リスク当たりの対価を相対的に低く評価する一方、状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を相対的に高く評価する度合であることを示している。

同無限時間では、HJB 方程式から導出された間接効用関数の非斉次線形偏微分方程式に対し、Liu(2007) の準解析解構成法の無限時間版である Kraft *et al.*(2013) の準解析解構成法を検討したが、一般には、解核関数の積分条件が満たされず適用不可能であることが判明した。そこで、非斉次項に対し Campbell and Viceira(2002)、楠田(2013) の対数線形近似法を適用し、近似解析解を導出し、近似最適消費と近似最適投資を算出した。同近似最適投資を有限時間問題で導出された厳密な最適投資と比較すると、潜在ファクターの変化を考慮しない近視眼的需要項は同一であるが、潜在ファクターの変化に保険を掛ける保険需要項は厳密解では潜在ファクターの相当程度複雑な関数であるにも拘らず、近似解ではアフィン関数と見做していることが判明した。また、導出された近似解析解の係数体系は一般に解が複数存在する代数方程式の解として表されているため、本最適化問題を前進・後退確率微分方程式の最適制御問題として再解釈することで、Maslowski and Veverka(2014) を援用し、本最適化問題の解であるための十分条件を提示した。

次に、CRRA 効用では不可分となっている相対的危険回避度と相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）を分離できる Epstein-Zin 効用を有する消費者の無限時間国内

証券投資最適化問題を考察した。同問題では、HJB 方程式から導出された間接効用関数の偏微分方程式に非斉次項のみならず非線形項が現れた。従って、Epstein-Zin 効用消費者の証券投資最適化問題の場合、有限時間問題であっても、線形微分方程式を対象とした、Liu(2007)の準解析解構成法は適用できないことが判明した。そこで、非斉次項に対して Campbell and Viceira(2002)、楠田 (2013) の対数線形近似法を適用して近似解析解を導出し、近似最適消費と近似最適投資を算出した。近似最適投資において、異時点間代替弾力性は、相対的危険許容度のように、単位投資リスク当たりの対価と（状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する）投資の保険価値に重み付けを与えておらず、投資の保険価値のみに直接影響を与えることが示された。また、CRRA 効用の場合と同様に、同近似解析解の係数体系は一般に解が複数存在する代数方程式の解として表されているが、効用関数が再帰的に定義されていることから、Maslowski and Veverka(2014)を適用することはできない。そこで、再帰的効用関数を対象とした前進・後退確率微分方程式の最適制御問題に十分条件を与えている Agram and Øksendal(2014)を援用して、本最適化問題の解であるための十分条件を提示した。

そして、相似拡大的頑健効用消費者の無限時間国内証券投資最適化問題を考察した。最悪確率を求める効用最小化後に現れる最悪確率下の予算制約式は、曖昧性を考慮しない場合の単位投資リスク当たりの対価は全消費者共通のリスクの市場価格であったのに対し、相似拡大的頑健効用消費者にとっての最悪確率下の単位投資リスク当たりの対価は相対的曖昧性回避度に依存しており、消費者によって異なることを示した。すなわち、より曖昧性回避的な相似拡大的頑健効用消費者であるほど、最悪確率において、単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも低く想定し、その結果、最悪確率下の富過程の実質期待超過収益率を低く想定することを示した。次に、最悪確率下の効用最大化問題を解いた後に現れた間接効用関数の偏微分方程式には、Epstein-Zin 効用の場合と同様に、非斉次項のみならず非線形項が現れたので、非斉次項に対数線形近似法を適用して近似解析解を導出し、近似最適消費と近似最適投資を算出した。近似最適投資において、CRRA 効用の場合は単位投資リスク当たりの対価に相対的危険許容度を、（状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する）投資の保険価値に「 $1 - \text{相対的危険許容度}$ 」を重み付けていたのに対し、相似拡大的頑健効用の場合は、単位投資リスク当たりの対価に「相対的不確実性許容度（相対的危険回避度と相対的曖昧性回避度の和の逆数）」を、投資の保険価値に「 $1 - \text{相対的不確実性許容度}$ 」を重み付けることが判明した。

生保頑健運用問題では、楠田 (2014) が生命保険会社の生保販売を証券の空売り投資と見做し、生保債務をポートフォリオに組み込む新たなアプローチにより、生保頑健運用問題を楠田・菊池 (2014) の消費と長期証券投資の最適化問題の枠組みの中に位置付け、近似解析解を与えている。そこで、生保頑健運用問題を第 6 章の枠組みの中に位置付け、近似解析解を導出し、近似最適投資比率を算出した。

最後に、アフィン潜在ファクター（国内）証券市場モデルを拡張した、菊池 (2018) のアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルにおいて、対数線形近似法を可能とすべく非定常ファクターを捨象したモデルを仮定し、CRRA 効用消費者と相似拡大的頑健効用消費者の無限時間国際証券投資問題を考察した。危険証券への最適投資比率は、為替レート固有の状態過程の変化の影響を、近視眼的需要では為替レート固有のリスクの市場価格の変化を通じて間接的に、保険需要項では直接的に受けているほか、最適投資比率の同変化に対する感応度にリスクの市場価格の内外価格差が影響を及ぼしていることが判明した。