

バトボルドボロソフタ博士論文審査要旨

I. 論文の主題と構成

バトボルドボロソフタ氏が提出した博士論文のタイトルは『リスクと不確実性の下での消費・長期証券投資の頑健制御と個人資産運用、生命保険運用への応用』であり、実用に耐える一般性の高い国際証券市場モデルの下、個人及び生保の証券投資問題において、比較静学、実証分析、そして実用化を企図して、ナイトの不確実性下、最適頑健投資の解析解、乃至は近似解析解を導出することを目的とした研究である。

序論である1章以降の構成は次の通りである。2章で、アフィン潜在ファクター国内証券市場モデルを紹介した後、3・4章で、標準的なCRRA効用(相対的リスク回避度一定効用)、5章で、CRRA効用を一般化したEpstein-Zin効用と段階的に高度な問題に取組み、6章で、目的とする「相似拡大的頑健効用」の場合の証券投資問題を考察し、その結果を7章で生保運用問題に応用している。8章で、アフィン潜在ファクター国内証券市場モデルを国際証券市場に一般化したアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルを導入し、9章でCRRA効用の場合、10章で相似拡大的頑健効用の場合を考察している。最後に、第11章で、結論と今後の課題を述べている。

II. 論文の概要

国内証券市場モデルとして、柔軟性の高い平均回帰的潜在ファクター(状態変数)の下、短期金利とMPR(リスクの市場価格)が同ファクターのアフィン関数で表されるアフィン潜在ファクター証券市場モデルを導入している。同モデルの下、先ず、CRRA効用消費者の有限時間国内証券投資最適化問題を考察しているが、最適条件であるHJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程式から導出された間接効用関数の線形偏微分方程式には非斉次項が現れる。そこでLiu(2007)の線形微分方程式を対象とした準解析解構成法を適用して、準解析解を導出し、最適消費・富比率と危険証券(非短期安全証券)への最適投資比率を算出している。同最適投資比率は、状態変数の将来の変化を考慮しない「近視眼的需要項」と同変化に保険を掛ける「保険需要項」の和で表されること、そして、近視眼的需要項は単位投資リスク当たりの対価であるMPRを相対的リスク許容度(相対的リスク回避度の逆数)で重み付けており、保険需要項は状態変数の変化に対する投資の保険価値を「 $1 - \text{相対的リスク許容度}$ 」で重み付けている。すなわち、最適投資比率は単位投資リスク当たりの対価を相対的リスク許容度で、状態変数の変化に対する投資の保険価値を「 $1 - \text{相対的リスク許容度}$ 」で重み付けた加重平均であることが確認されている。

次に、CRRA効用消費者の無限時間国内証券投資最適化問題を考察している。この場合、導出された間接効用関数の非斉次線形偏微分方程式に対しLiu(2007)の準解析解構成法の無限時間版であるKraft *et al.* (2013)の準解析解構成法を検討し、一般には、適用不可能で

あることを示している。そこで、非斉次項に対し Campbell and Viceira(2002)、楠田(2013)の対数線形近似法を適用して、近似解析解を導出し、危険証券への近似最適投資比率を算出している。同近似最適投資比率を有限時間問題で導出された厳密な最適投資比率と比較すると、潜在ファクターの変化を考慮しない近視眼的需要項は同一であるが、潜在ファクターの変化に保険を掛ける保険需要項は厳密解では潜在ファクターの相当程度複雑な関数であるにも拘らず、近似解ではアフィン関数と見做していることが示されている。また、導出された近似解析解の係数体系は一般に解が複数存在する代数方程式の解として表されているため、本最適化問題を前進・後退確率微分方程式の最適制御問題として再解釈することで、Maslowski and Veverka(2014)の前進・後退確率微分方程式の理論を援用し、本最適化問題の解であるための十分条件を提示している。

第三に、CRRA 効用では不可分となっている相対的リスク回避度と相対的異時点間変動回避度(異時点間代替弾力性の逆数)を分離できる Epstein-Zin 効用を有する消費者の無限時間国内証券投資最適化問題を考察している。同問題では、HJB 方程式から導出された間接効用関数の偏微分方程式に非斉次項のみならず非線形項が現れ、微分方程式の線形性に基づく Liu(2007)の準解析解構成法を適用できない。そこで、対数線形近似法により近似解析解を導出して、危険証券への近似最適投資比率を算出している。また、CRRA 効用の場合と同様に、同近似解析解の係数体系は一般に解が複数存在する代数方程式の解として表されているが、効用関数が再帰的に定義されていることから、Maslowski and Veverka(2014)の理論は適用できない。そこで、再帰的効用関数を対象とした前進・後退確率微分方程式の最適制御問題に十分条件を与えている Agram and Oksendal(2014)の理論を援用して、最適解の十分条件を提示している。さらに、1ファクター証券市場モデルの簡便推定を行い、近似最適消費・富比率と近似最適投資の精度が総じて非常に高いことを示しているほか、相対的リスク回避度、相対的異時点間変動回避度等の変化が消費・富比率と最適投資比率に及ぼす影響を比較静学により分析している。

第四に、ナイトの不確実性下での頑健投資の効用として、CRRA 効用をナイトの不確実性下に一般化した相似拡大的頑健効用(Maenhout(2004))に着目し、相似拡大的頑健効用を有する消費者の無限時間国内証券投資最適化問題を考察している。最悪確率測度を求める最小化問題と効用最大化問題を解いた後に現れる間接効用関数の偏微分方程式には非線形項が現れるので、対数線形近似法により近似解析解を導出し、近似最適消費・富比率と危険証券への近似最適投資比率を算出している。

近似最適投資は、単位投資リスク当たりの対価を「相対的不確実性回避許容度」(相対的リスク回避度と相対的曖昧性回避度の和の逆数)で、状態変数の変化に対する投資の保険価値を「1-相対的不確実性許容度」で重み付けた加重平均として表されている。相似拡大的頑健効用は、最悪確率下で単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも相対的曖昧性回避度に応じて低く想定する。すなわち、相似拡大的頑健効用は、最悪確率決定の第1段階で、単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも相対的曖昧性回

回避度に応じて低く想定し、消費・投資決定の第 2 段階で、第 1 段階で低く想定された最悪確率下の単位投資リスク当たりの対価を相対的危険回避度に応じてさらに低く評価している。両回避度のかかる効果が相俟って、両回避度の和である相対的不確実性回避度が単位投資リスク当たりの対価を相対的に低く評価する一方、状態変数の変化に対する投資の保険価値を相対的に高く評価していることを示唆している。

第五に、生保頑健運用問題を前章の最適化問題の枠組みの中に位置付け、近似解析解を導出し、近似最適投資比率を算出している。

最後に、アフィン潜在ファクター証券市場モデルを拡張した、菊池(2018)のアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルにおいて、対数線形近似法を可能とすべく非定常ファクターを捨象したモデルを仮定し、相似拡大的頑健効用消費者の無限時間国際証券投資問題を考察している。対数線形近似法により導出された近似解析解から算出した危険証券の近似最適投資比率には、国内証券投資を考察していた際には現れなかった、通貨固有ファクターに関するリスクの市場価格、世界経済ファクターに関するリスクの市場価格の内外価格差、通貨固有ファクターに関するリスクの市場価格の内外価格差が現れている。このことは、国際証券投資では、潜在ファクターである世界経済ファクターと通貨固有ファクターを Kalman Filter 等により常時的確に推定するほか、通常のリスクの市場価格に加え、通貨固有ファクターに関するリスクの市場価格、世界経済ファクターに関するリスクの市場価格の内外価格差、通貨固有ファクターに関するリスクの市場価格の内外価格差を的確に推定する必要があることを示している。

III. 論文の評価

平成バブル崩壊以降の長期停滞の一因としてイノベーション創出のためのリスク・マネーの供給不足が指摘されてきたほか、社会保障制度の持続困難に伴い各家計が退職後に備えるための資産形成を行う必要性が高まってきたことから、国家経済戦略として「貯蓄から投資へ」が提唱されて久しいが、家計の投資比率は低迷を続けている。一因として、政府が一般家計の資産運用において模範的アセット・アロケーションを提示できていないことが指摘されている。また、GPIF が 2014 年秋、公的年金運用における株式投資比率を引き上げる方針を決定したが、本来、公的年金運用における株式投資比率は、我が国の平均的家計の最適アセット・アロケーションを踏まえて設定されるべきものである。さらに、リスク・マネーの供給不足解消には、長期資金を調達しているため、銀行等に比べリスク・マネー供給能力が潜在的に高い生保等の機関投資家が長期債務の着実な履行を担保しつつリスク資産投資比率を高められるような運用方法が模索されている。他方、世界金融危機において、先端的リスク管理技術を有するとされていた欧米の少なからぬ金融機関が大幅な損失を被ったことから、確率（過程）自体を特定できない「ナイトの不確実性」を考慮し、最悪確率（過程）を想定した投資の頑健最適化に対する認識が高まっている。併しながら、ナイトの不確実性下、個人の模範的アセット・アロケーション及び生保の最適頑健

運用を探究することは理論的に多くの困難を伴っている。我が国の置かれているこうした状況を踏まえると、実用に耐える一般性の高い国際証券市場モデルの下、個人及び生保の証券投資問題において、比較静学、実証分析、そして実用化を企図して、ナイトの不確実性下、最適頑健投資の近似解析解の導出をテーマとする本研究は社会的意義が明確に意識されていることは言うに及ばず、一般性の高い国際証券市場モデルの下での頑健消費・投資最適化問題に近似解析解を与えるという理論的に困難な課題を掲げており、学術的意義も明確に意識されている。従って、論文審査基準項目(1)論文テーマについては、秀と評価する。

次に、国際証券投資の頑健最適化問題という非常に高度な問題を、国内証券投資の標準的効用の最適化問題から段階を踏んで到達しようとする構成は、最終問題の解法・結果の説得力を高めているほか、標準的結果を基準にして最終結果の経済学意義を浮き彫りにしている。従って、論文審査基準項目(2)論文構成については、秀と評価する。

第三に、実用に耐える国際証券市場モデルの下、国際証券投資の頑健最適化問題に近似解析解を与える為、一般性・柔軟性が高いにも拘らず、解析的取扱いの相当程度容易な連続時間の確率微分方程式で記述されたアフィン国際証券市場モデルに着目したほか、ナイトの不確実性下、曖昧性回避的で、従来標準的効用である CRRA 効用を一般化しながら、解析的取扱いの相当程度容易な相似拡大的頑健効用に着目し、確率制御問題として本問題を捉えたことは、実際に、国際証券投資頑健最適化問題に対し近似解析解を導いていることから窺える通り、優れた研究方法として評価出来る。また、準解析解、乃至は近似解析解を与え、同解に基づく最適消費・富比率と最適投資比率をデータ収集・実証分析の容易な検証可能命題として提示しているほか、拡張性の高いモデルを仮定していることから、検証可能命題の実証分析結果を踏まえたさらなるモデル発展の道を開いており、科学方法論の観点からも高く評価出来る。従って、論文審査基準項目(3)研究方法については、秀と評価する。

第四に、先行研究や関連研究については、本研究に直接的に関連する先行・関連研究については渉猟され、的確に理解されていると評価する。併しながら、例えば、本研究テーマに関連する離散時間モデルの研究や相似拡大的頑健効用消費者の本研究テーマとは異なる最適化問題の研究までは十分に渉猟されるに至っていない。従って、論文審査基準項目(4)先行研究や関連研究に関する理解については、優と評価する。

第五に、80 頁を超える大部の論文でありながら、引用等は適切に処理され、学術論文としての体裁を十分に整えているので、論文審査基準項目(6)体裁については、秀と評価する。

最後に、国際証券投資の頑健最適化問題に近似解析解を与えている第 10 章が理論的に興味深い結果を示していることは言うに及ばず、第 3~9 章までの各章についても、何れも結論に注目すべきオリジナリティを確認出来る。実際、第 3 章、第 5 章、第 6 章に基づく 3 論文は和文査読誌に採択され、外部評価も高いことを示している。国際証券投資問題に準解析解を与えている第 9 章、国際証券頑健投資問題に近似解析解を与えている第 10 章は、

英訳して国際査読誌に投稿すべき水準に到達していると思料する。従って、論文審査基準項目(5)オリジナリティについては、秀と評価する。

IV. 結論

上記評価で示した通り、論文審査基準6項目中1項目優、5項目秀、就中、最も重視される項目(5)が秀であることを踏まえ、合格と評価する。

以 上