博士論文

リスクと不確実性の下での消費・長期証券投資の頑健制御と個人資産運用，生命保険運用への応用

2019年7月10日

滋賀大学大学院経済学研究科
経済経営リスク専攻

氏　　名　　　バトボルド　ボロルソフタ

指導教員　　　　楠　田　　　浩　二
指導教員　　　　内　藤　　　雄　志
指導教員　　　　石　井　　　利江子

1. 序論

平成バブル崩壊以降の長期停滞の一因としてイノベーション創出のためのリスク・マネーの供給不足が指摘されてきたほか，社会保障制度の持続困難に伴い各家計が退職後に備えるための資産形成を行う必要性が高まってきたことから，国家経済戦略として「貯蓄から投資へ」が提唱されて久しいが，家計の投資比率は低迷を続けている．一因として，政府が一般家計の資産運用において模範的アセット・アロケーションを提示できていないことが指摘されている．[1] また，GPIF が 2014 年秋，公的年金運用における株式投資比率を引き上げる方針を決定したが，本来，公的年金運用における株式投資比率は，我が国の平均的家計の最適アセット・アロケーションを踏まえて設定されるべきものである．さらに，リスク・マネーの供給足解消には，長期資金を調達しているため，銀行等に比べリスク・マネー供給能力が潜在的に高い生保等の機関消費者が長期債務の着実な履行を担保しつつリスク資産投資比率を高められるような運用方法が模索されている．

他方，世界金融危機において，先端的リスク管理技術を有するとされていた欧米の少なからぬ金融機関が大幅な損失を被ったことから，確率（過程）自体を特定できない「ナイトの不確実性」を考慮し，最悪確率（過程）を想定した投資の頑健最適化に対する認識が高まっている．併しながら，ナイトの不確実性下，個人の模範的アセット・アロケーション及び生保の最適頑健運用を探求することは理論的に多くの困難を伴っている．

従って，ナイトの不確実性下，個人の模範的頑健アセット・アロケーション及び生保等機関消費者の最適頑健運用を探求することは，現代日本経済の喫緊の課題であると思料する．本論文の最終目的は，実用に耐える一般性の高い国際証券市場モデルの下，個人及び生保の証券投資の頑健最適化問題において，比較静学と実証分析を実現可能とすべく，最適投資の解析解，乃至は近似解析解を導出することであるが，同目的達成のためには，次の四つの課題を克服する必要がある．

第一に，効率的証券投資においては，長期分散投資が必須であるが，長期投資では安全証券は短期債ではなく長期物価連動債なので，投資対象に長期物価連動債を含める必要があるが，長期債を含む証券投資問題では，一般に，HJB 方程式から導出される間接効用関数の偏微分方程式に非斉次項が現れ，解析解の導出を困難にすることである．

第二に，同問題を Campbell and Viceira の対数線形近似法により近似解析解を求める場合，解を構成する未知係数体系の代数方程式は一般に複数解が存在するため，十分条件を提示する必要が生じることである．

第三に，実用に耐える一般性の高い証券市場モデルの下での投資の頑健最適化では，行列表現されている確率過程を対象に，最悪確率特定化問題と最悪確率下の効用最大化問題を解析的に解くには，複雑な計算を要することである．

第四に，国際証券投資問題においては，一般性が高く且つ解析的取扱い可能な標準的国際証券市場モデルが確立されていないことに加え，国内証券市場モデルに為替変動リスクの潜在ファクターが追加されるため，一層複雑な問題を解くことを余儀なくされることである．

本稿では，これらの課題を有する非常に複雑な問題に対し，CRRA 効用消費者の有限時間国内証券投資問題の考察から開始し，同無限時間問題，Epstein-Zin 効用消費者の問題と段階的に高度な問題に取り組んでゆく接近法を採用する．すなわち，前段階の問題の結果を参考にすることで，次段階の問題に着実に解答を与えてゆき，最終的に相似拡大的頑健効用

[1]「貯蓄から投資へ」が停滞している主因と模範的アセット・アロケーション提示の必要性については，楠田 [24] を参照せよ．

消費者の無限時間国際証券問題に解答を与える．

すなわち，まず，短期金利とリスクの市場価格が共に一般次元の潜在ファクターのアフィン関数で表される一般性の高いアフィン潜在ファクター（国内）証券市場モデルを仮定した上で，CRRA (Constant Relative Risk Aversion) 効用消費者の有限時間証券投資問題を考察することから研究を開始する．同問題では，最適化条件である HJB（Hamilton-Jacobi-Bellman）方程式から線形・非斉次偏微分方程式が導出されるが，Liu [29] の準解析解構成法を応用し，準解析解を導出する．しかし，同方法は，CRRA 効用消費者の無限時間問題に適用できないことが判明する．

そこで，CRRA 効用消費者の無限時間問題に対しては，Campbell and Viceira [15]，楠田 [25] の非斉次項の対数線形近似法を適用して近似解析解を導出する．同近似解析解は，解を構成する未知係数体系が一般に解が複数存在する代数方程式の解であったことから，本問題の解であるための十分条件を Maslowski and Veverka [32] の前進・後退確率微分方程式に関する理論を援用して提示する．

次に，ナイトの不確実性下の無限時間証券投資問題の準備段階として，CRRA 効用では不可分となっている相対的危険回避度と相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）を分離できる Epstein-Zin 効用を有する消費者の無限時間国内証券投資最適化問題を考察する．同問題の HJB 方程式から導出される偏微分方程式には非斉次項のみならず非線形項が現れるが，対数線形近似法により近似解析解を導出できることを示す．また，近似解析解に基づく近似消費・富比率と近似最適投資比率の近似精度を簡便数値実験により評価する．

そして，ナイトの不確実性下の無限時間証券投資問題を考察する．頑健効用としては，CRRA 効用の拡張であり，CRRA 効用の持つ望ましい性質である「相似拡大性」を持ち，Epstein-Zin 効用との類似性が高いとされる「相似拡大的頑健効用」(Maenhout [30]) を仮定する．このとき，消費者の無限時間頑健最適化問題の HJB 方程式から導出される非線形・非斉次偏微分方程式は，Epstein-Zin 効用から導出される非線形・非斉次偏微分方程式と同一構造であり，対数線形近似法により近似解析解を導出できる．

上記消費者の無限時間頑健最適化問題の応用問題として，生命保険会社の生保頑健運用問題を考察する．楠田 [26] が生命保険会社の生保販売を証券の空売り投資と見做し，生保債務をポートフォリオに組み込む新たなアプローチにより，生保頑健運用問題を楠田・菊池 [27] の消費と長期証券投資の最適化問題の枠組みの中に位置付け，近似解析解を与えていることを踏まえ，上記相似拡大的頑健効用消費者の無限時間証券投資問題の枠組みの中に位置付け，近似解析解を導く．

最後に，アフィン潜在ファクター（国内）証券市場モデルを拡張した，菊池 [21] のアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルにおいて，対数線形近似法を可能とすべく非定常ファクターを捨象したモデルを仮定し，CRRA 消費者の有限時間証券投資問題と相似拡大的頑健効用消費者の無限時間証券投資問題を考察する．

本論文の第 2 章以降の構成は，次の通りである．第 2 章では，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介する．アフィン潜在ファクター証券市場モデルの下で，CRRA 効用消費者の長期証券投資の有限時間問題（第 3 章），同無限時間証券投資問題（第 4 章），Epstein-Zin 効用消費者の無限時間証券投資問題（第 5 章），相似拡大的頑健効用消費者の無限時間証券投資問題（第 6 章）を順に考察する．第 6 章で提示した頑健最適化モデルを応用して，生命保険会社におけるアセット・アロケーションの頑健最適化問題を第 7 章で考察する．第 8 章

で，アフィン潜在ファクター国際証券市場モデルを紹介する．アフィン潜在ファクター国際証券市場モデルの下，第 9 章で CRRA 効用消費者の長期国際証券投資の有限時間問題，第 10 章で相似拡大的頑健効用消費者の無限時間国際証券投資問題を考察する．最後に，第 11 章で，結論と今後の課題を述べる．

尚，本論文は，指導教員である楠田教授と菊池准教授との共同研究の成果であり，筆者単独の成果ではない．しかし，30 カ月弱の長きに亘った本研究において各共同研究者の貢献箇所を峻別することは非常に困難であったことに加え，かかる峻別のための記載が既に相当程度の分量となっている本論文の読者を当惑させることも考慮し，各章において，共同研究論文を参照する形で，共同研究の成果である本論文を筆者の博士論文として公表させて頂いた次第である．

2. アフィン潜在ファクター証券市場モデル

本章では，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介し，同モデル下の無裁定証券価格過程の従う確率微分方程式と消費者の予算制約式を示す．[2]

2.1. アフィン潜在ファクター証券市場モデル

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する．消費者共通の確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ によりモデル化されている．ここで，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,\infty)}$ は N 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである．期待値作用素を E，$\mathcal{F}_t$ の下での期待値作用素を E_t と表記する．

市場では，1 種類の消費財，短期債（以下，適宜「短期安全証券」と呼ぶ）,「中長期安全証券」としての満期までの期間が最長 τ，額面が 1 単位の消費財，任意の満期の信用リスクの無い割引物価連動債（以下,「物価連動債」と呼ぶ），J 種類の非債券の主要指数（株式指数，REIT 指数等）が任意の時点で取引されている．

以下では，消費財を価値基準財とし，諸証券の価格を実質価格で表示する．短期債の実質価格を P_t，満期 T の物価連動債の実質価格を P_t^T，非債券の主要指数の配当込みの実質価格を S_t^j と表記する．また，行列，もしくはベクトル A の転置を A' と表記する．

本稿では，一般性の高い，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定する．

仮定 2.1. N 次元潜在ファクター X_t は次の確率過程に従う．

$$dX_t = K(\theta - X_t)\,dt + \Sigma\,dB_t, \tag{2.1}$$

ここで，θ は $N \times 1$ 定数ベクトル，K, Σ は $N \times N$ 定数行列である．また，K は次のように対角化可能な正値行列である．

$$L = Q^{-1}KQ = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

ここで，$l_1, l_2, \cdots, l_N > 0$ であることに留意．

物価連動債の実質価格 (実質金利の期間構造）については，潜在ファクター X_t のアフィン・モデル（Duffie and Kan [17] ）を仮定し，非債券の主要指数については，Mamaysky [31] の提案したアフィン型モデルにおいて非定常項を捨象したモデルを仮定する．

仮定 2.2. *1.* リスクの市場価格 Λ_t，瞬間的スポット・レート r_t は，潜在ファクター X_t のアフィン関数である．

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda X_t, \tag{2.3}$$

$$r_t = r_0 + r' X_t, \tag{2.4}$$

ここで，r_0 は定数，λ, r は $N \times 1$ 定数ベクトル，Λ は $N \times N$ 定数行列であり，$K + \Sigma\Lambda$ は正則である．

2. 非債券の主要指数の配当過程 D_t^j は潜在ファクター X_t の次式で表される関数である．

$$D_t^j = (d_{0j} + d_j' X_t)\exp(b_{0j} t + b_j' X_t). \tag{2.5}$$

ここで，d_{0j}, b_{0j} は定数，d_j, b_j は $N \times 1$ 定数ベクトルである．

[2]本章は，バトボルド他 [6] の研究成果である．

2.2. 証券価格過程

以下では，物価連動債の満期までの期間を$\tau = T - t$，$N \times N$ 単位行列を I_N と表記する．

補題 2.1. 仮定 *2.1*・*2.2* の下，諸証券の無裁定実質価格過程は次を満たしている．

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t\,dt, \qquad P_0 = 1. \tag{2.6}$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = (r_t + b(\tau)'\Sigma\Lambda_t)\ dt + b(\tau)'\Sigma\,dB_t, \qquad P_T^T = 1, \tag{2.7}$$

ここで，$b(\tau)$ は次式で与えられている．

$$b(\tau) = (K + \Sigma\Lambda)'^{-1}\big(e^{-\tau(K+\Sigma\Lambda)'} - I_N\big)r. \tag{2.8}$$

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = \big(r_t + b_j'\Sigma\Lambda_t\big)\ dt + b_j'\Sigma\,dB_t, \tag{2.9}$$

ここで，b_j は次式で与えられている．

$$b_j = (K + \Sigma\Lambda)'^{-1}(d_j - r). \tag{2.10}$$

証明. 標準ブラウン運動 B_t とリスクの市場価格 Λ_t により，

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \Lambda_s\,ds, \tag{2.11}$$

で定義される確率過程 $\tilde{B}_t$ は，Girsanov の定理より，リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である．よって，リスク中立確率測度の下で，潜在ファクターの確率微分方程式は，

$$\begin{aligned} dX_t &= (K(\theta - X_t) - \Sigma\Lambda_t)\ dt + \Sigma\,d\tilde{B}_t \\ &= \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}\ dt + \Sigma\,d\tilde{B}_t, \end{aligned}$$

と表現される．

今，物価連動債 P^T を r_t の上に書かれた派生資産とみなすと，r_t は X_t のアフィン関数なので，滑らかな関数 $f(X_t, t)$ により，

$$P_t^T = f(X_t, t), \tag{2.12}$$

と表される．このとき，無裁定条件から，f は次の偏微分方程式の解となっていることが示される．

$$f_t + \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}'f_X + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma' f_{XX}] - (r_0 + r'X_t)f = 0, \qquad f(X_T, T) = 1. \tag{2.13}$$

一方，本モデルはアフィン・モデルなので，$\tau = T - t$ とおくと，上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 $b_0(\tau), b(\tau)$ によって

$$f(X_t, t) = e^{b_0(\tau) + b(\tau)'X_t}, \qquad (b_0(0), b(0)) = (0, 0), \tag{2.14}$$

と書けることが示される．まず，上式を対数微分して P_t^T の確率微分方程式を導出すると，(2.7) 式を得る．次に，(2.14) 式に偏微分を施し，(2.13) 式に代入すると，次式を得る．

$$-\frac{db_0(\tau)}{d\tau}-\frac{db(\tau)'}{d\tau}X_t+b(\tau)'\{K\theta-\Sigma\lambda-(K+\Sigma\Lambda)X_t\}+\frac{1}{2}b(\tau)'\Sigma\Sigma'b(\tau)-(r_0+r'X_t)=0. \quad (2.15)$$

(2.15) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，次式を得る．

$$\frac{db(\tau)}{d\tau}=-(K+\Sigma\Lambda)'b(\tau)-r, \qquad b(0)=0. \quad (2.16)$$

上式を定数変化法で解いて，(2.8) 式を得る．

非債券の第 j 指数を $\tilde{S}_t^j$ と表記する．このとき，Mamaysky [31] より，$\tilde{S}_t^j$ は次式で表される．

$$\tilde{S}_t^j=\exp(b_{0j}t+b_j'X_t). \quad (2.17)$$

配当率過程は次式となる．

$$\frac{D_t^j}{\tilde{S}_t^j}=(d_{0j}+d_j'X_t). \quad (2.18)$$

(2.17)(2.18) 両式より，配当込み指数に関する無裁定条件から，次式を得る．

$$b_{0j}+b_j'\{K\theta-\Sigma\lambda-(K+\Sigma\Lambda)X_t\}+\frac{1}{2}b_j'\Sigma\Sigma'b_j+(d_{0j}+d_j'X_t)-(r_0+r'X_t)=0. \quad (2.19)$$

(2.19) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(2.10) 式を得る． □

2.3.　予算制約式

非債券の主要指数に対する投資比率を Φ_t^j と表記する．また，物価連動債については，任意の満期の物価連動債を投資対象としているため，富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる．そこで，物価連動債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$ と表記する [3]．以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi_t=\Sigma'\left(\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)b(\tau)\,d\tau+\sum_{j=1}^{J}\Phi_t^jb_j\right). \quad (2.20)$$

以下，Ψ_t を「投資過程」ないしは「投資」と略称する．

このとき，予算制約式が次の補題で示される．

補題 2.2. 投資過程 Ψ_t と消費率過程 c_t を所与とする．このとき，仮定 *2.1*・*2.2* の下，富過程 W_t は次の予算制約式を満たす．

$$dW_t=\{W_t(r_t+\Psi_t'\Lambda_t)-c_t\}\,dt+W_t\Psi_t'\,dB_t. \quad (2.21)$$

留意点 2.1. 予算制約式 *(2.21)* は，投資 Ψ_t が大きくなるにつれて，富の実質収益率のリスクを高める一方，リスクの市場価格に比例して富の実質期待超過収益率を高めることを示している．すなわち，リスクの市場価格は，全消費者共通の単位投資リスク当たりの対価であることを示している．

[3] ある特定の満期の物価連動債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため，許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする．

証明. 本稿では，消費財を価値基準財とする実質証券価格を対象としてきたが，ここではまず，名目価格を対象とする．すなわち，満期までの期間 τ の物価連動債の名目価格を $\tilde{P}_t(\tau)$，主要指数の配当込みでない名目価格を $\tilde{S}_t^{*j}$ と表記する．また，ある拡散過程に従う一般物価過程を p_t と表記する．

短期債，物価連動債，主要指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta,(\vartheta(\tau)),(\vartheta^{*j}))$ とすると，富の名目価値 $\tilde{W}_t$ は次式で表現される．

$$\tilde{W}_t=\vartheta_t\tilde{P}_t+\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{J}\vartheta_t^{*j}\tilde{S}_t^{*j}. \tag{2.22}$$

このとき，配当込み主要指数のポートフォリオは，

$$\vartheta_t^j=\frac{\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^j}\vartheta_t^{*j}, \tag{2.23}$$

で定義され，配当込み主要指数の名目収益率と主要指数の名目収益率の間に，

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}=\frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}}+\tilde{D}_t^j dt, \tag{2.24}$$

が成り立っていることに注意すると，所与の c_t の下，自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta,(\vartheta(\tau)),(\vartheta^{*j}))$ は，次式を満たしている．

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t}&=\frac{1}{\tilde{W}_t}\left\{\vartheta_t d\tilde{P}_t+\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)d\tilde{P}_t(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{J}\vartheta_t^{*j}\left(d\tilde{S}_t^{*j}+\tilde{D}_t^j\tilde{S}_t^{*j}dt\right)-p_t c_t dt\right\}\\&=\frac{\vartheta_t\tilde{P}_t}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t}+\int_0^{\bar{\tau}}\frac{\vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\frac{\vartheta_t^j\tilde{S}_t^j}{\tilde{W}_t}\left(\frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}}+\tilde{D}_t^j dt\right)-\frac{c_t}{W_t}dt\\&=\left(1-\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j\right)\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t}+\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}-\frac{c_t}{W_t}dt.\end{aligned}$$

このとき，各証券の名目収益率の項に，

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}=\frac{dS_t^j}{S_t^j}+\frac{dp_t}{p_t}+\left(\frac{dS_t^j}{S_t^j}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right),$$

等を代入し整理すると，次式が導かれる．

$$\begin{aligned}\frac{dW_t}{W_t}&=\frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t}-\frac{dp_t}{p_t}-\left(\frac{dW_t}{W_t}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right)\\&=\left(1-\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j\right)\frac{dP_t}{P_t}+\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j\frac{dS_t^j}{S_t^j}-\frac{c_t}{W_t}dt.\end{aligned}$$

上式に，(2.6)(2.7)(2.9) 式を代入し，整理すると，(2.21) 式を得る． □

予算制約式 (2.21) は，富過程が $u=(c,\Psi)$ で決定されることを示しており，消費者の効用最大化問題における制御過程は $u_t=(c_t,\Psi_t)$ であることが分かる．状態過程を $\mathbb{X}_t=(W_t,X_t)'$ と表記する．$W_0>0$ とする．予算制約式 (2.21) を満たす制御過程 $u_t=(c_t,\Psi_t)$ を初期状態 $\mathbb{X}_0=(W_0,X_0')'$ に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を $\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)$ と表記する．

3. CRRA 効用消費者の有限時間証券投資問題

本章では，CRRA 効用消費者の有限時間証券投資問題に対し，Liu [29] の準解析解構成法を応用して準解析解を導出する．[4]

3.1. 有限時間の CRRA 効用と最適化問題

仮定 3.1. 消費者は次の相対的リスク回避度一定効用を予算制約式 *(2.21)* の下で最大化する．

$$U(c) = \mathrm{E}\left[\int_0^T \alpha\, e^{-\beta t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}dt + (1-\alpha)\, e^{-\beta T}\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]. \tag{3.1}$$

このとき,「富を含む状態変数に対する広義の間接効用関数」J（以下,「間接効用関数」と呼ぶ）が次式で定義される．

$$J(t,\mathbb{X}_t^u) = \mathrm{E}_t\left[\int_t^T \alpha\, e^{-\beta s}\frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma}ds + (1-\alpha)\, e^{-\beta T}\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right], \qquad \forall t\in[0,T]. \tag{3.2}$$

消費と投資の最適化問題と価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} J(0,\mathbb{X}_0). \tag{3.3}$$

3.2. 最適消費・投資の準解析解

HJB 方程式から推測された価値関数を構成する未知関数 $G(t,X_t)$ の偏微分方程式を導出した後，同方程式に Liu [29] の準解析解構成法を適用して，解の関数形を特定し，同関数の未知係数群の常微分方程式を導出する．さらに，同方程式を解いて，最適消費・投資の準解析解を導出する．

3.2.1. 間接効用関数の偏微分方程式の導出

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned}\sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}&\left\{J_t(t,\mathbb{X}^u) + \begin{pmatrix} W_t\left(r_t+\Psi_t'\Lambda_t\right)-c_t \\ K(\theta-X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W(t,\mathbb{X}^u) \\ J_X(t,\mathbb{X}^u)\end{pmatrix}\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW}(t,\mathbb{X}^u) & J_{WX}(t,\mathbb{X}^u) \\ J_{XW}(t,\mathbb{X}^u) & J_{XX}(t,\mathbb{X}^u)\end{pmatrix}\right] + \alpha\, e^{-\beta t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right\} = 0,\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\text{s.t.}\quad J(T,\mathbb{X}_T^u) = (1-\alpha)\, e^{-\beta T}\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

HJB 方程式における最大化の必要条件から制御変数の最適解 $u^* = (c^*,\Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} J_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \tag{3.5}$$

$$\Psi_t^* = \frac{\pi_t}{W_t^{*2}J_{WW}}, \tag{3.6}$$

ここで，W_t^* は予算制約式 (2.21) に最適制御 $u^* = (c^*,\Psi^*)$ を代入して得られる最適富過程で，

$$\pi_t = -W_t^*\left\{J_W\Lambda_t + \Sigma' J_{XW}\right\}. \tag{3.7}$$

[4]本章は，バトボルド他 [9] の研究成果である．

留意点 3.1. 最適制御は，次式のように，*2* 項の和に分解される．

$$\varPsi_t^* = -\frac{J_W}{W_t^* J_{WW}}\Lambda_t - \Sigma' \frac{J_{XW}}{W_t^* J_{WW}}. \tag{3.8}$$

第 *1* 項は，状態過程 X_t の変動に起因する限界間接効用の変動リスクを考慮せず，リスク資産投資の報酬であるリスクの市場価格を近視眼的に追及する項であり,「近視眼的需要項（*myopic demand*)」と呼ばれている．第 *2* 項は，状態過程 X_t の変動に起因する限界間接効用の変動リスクに保険を掛ける項であり,「保険需要項（*hedging demand*)」と呼ばれている．

最適消費 (3.5) 式と最適投資 (3.6) 式を HJB 方程式 (3.4) に代入し，

$$W_t^* J_W \Lambda_t' \varPsi_t^* + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t^*(\varPsi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t^*(\varPsi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW} & J_{WX} \\ J_{XW} & J_{XX} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' J_{XX}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}J_{WW}}, \tag{3.9}$$

に注意して整理すると，次の間接効用関数 J に関する偏微分方程式が得られる．

$$J_t + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' J_{XX}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}J_{WW}} + W_t^* r_t J_W + \{K(\theta - X_t)\}' J_X + \frac{\gamma}{1-\gamma} c_t^* J_W = 0. \tag{3.10}$$

上記偏微分方程式から間接効用関数 J は未知関数 $G(t, X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$J(t, \mathbb{X}_t) = e^{-\beta t}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\bigl(G(t, X_t)\bigr)^{\gamma}. \tag{3.11}$$

従って，HJB 方程式左辺の最大化の十分条件が満たされることは，次式で表される Hessian $\mathbf{H}$ が任意の制御変数 $(c, \varPsi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ に対し負定符号であることで確認できる．

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma e^{-\beta t} c^{-\gamma-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma e^{-\beta t}(W_t^*)^{1-\gamma}\bigl(G(X_t)\bigr)^{\gamma} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma e^{-\beta t}(W_t^*)^{1-\gamma}\bigl(G(X_t)\bigr)^{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

間接効用関数 J に偏微分を施し，(3.5)(3.6) 式に代入し，偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.10) に代入すると，次の命題を得る．

命題 3.1. 仮定 *2.1*・*2.2*・*3.1* の下，本問題 *(3.3)* の価値関数，最適消費，最適投資は，それぞれ *(3.11)* 式，*(3.13)* 式，*(3.15)* 式で表される．ここで，$G(t, X_t)$ は偏微分方程式 *(3.16)* の解である．

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}, \tag{3.13}$$

ここで，

$$W_t^* = W_0 \exp\left(\int_0^t \left(r_s + (\varPsi_s^*)'\Lambda_s - \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}}{G(X_s)} - \frac{1}{2}(\varPsi_s^*)'\varPsi_s^*\right) ds + (\varPsi_s^*)'\, dB_s\right), \tag{3.14}$$

$$\varPsi_t^* = \frac{1}{\gamma}\Lambda_t + \Sigma'\frac{G_X}{G}, \tag{3.15}$$

$$G_t + \mathcal{L}G + \alpha^{\frac{1}{\gamma}} = 0, \qquad\qquad G(T, X_T) = (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{3.16}$$

ここで，$\mathcal{L}$ は次式で定義される線形微分作用素である．

$$\mathcal{L}G = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' G_{XX}\right] + \left(K(\theta - X) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma(\lambda + \Lambda X)\right)' G_X - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\lambda+\Lambda X)'(\lambda+\Lambda X) + \frac{\gamma-1}{\gamma}r_t + \frac{\beta}{\gamma}\right)G. \quad (3.17)$$

留意点 3.2. *(3.14)* 式より，最適富過程は常に正であることが確認できる．また，$G(X_t)$ も常に正であることが後に示されることから，*(3.13)* 式より，最適消費過程も常に正であることが確認される．

留意点 3.3. 最適投資 *(3.15)* 式は次式のように変形できる．

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma}\Lambda_t + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\Sigma'\frac{G_X}{G}, \quad (3.18)$$

上式第 *2* 項に現れる，

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\Sigma'\frac{G_X(X_t)}{G(X_t)}, \quad (3.19)$$

については，*Campbell and Viceira [15]* の第 *3* 章では，危険資産の収益率と将来の短期金利の期待割引現在価値との共分散を危険資産の標準偏差で除して負としたものとして表現されている．これは，危険資産の収益率と将来の短期金利が異なる向きに動くと予想される場合，従って，投資収益率の基盤である短期金利の低下リスクに対する保険として危険資産が機能する場合，保険需要項は正となることを示している．すなわち，*(3.19)* で表される項は「将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値」と解釈できる．*(3.18)* 式では，*CRRA* 効用消費者の最適投資が，単位投資リスク当たりの対価を相対的危険許容度（相対的危険回避度の逆数）で，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を「1− 相対的危険許容度」で重み付けた加重平均として表されている．これは，相対的危険回避度が，単位投資リスク当たりの対価を相対的に低く評価する一方，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を相対的に高く評価する度合であることを示している．

証明．まず，最適消費は，

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} J_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t}\left\{e^{-\beta t}(W_t^*)^{-\gamma}G^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}.$$

従って，上式と最適投資を予算制約式 (2.21) に代入し，伊藤の補題を適用して解くと，最適富 (3.14) 式を得る．

次に，J に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$J_t = -\beta J + \gamma J\frac{G_t}{G}, \qquad WJ_W = (1-\gamma)J, \qquad J_X = \gamma J\frac{G_X}{G},$$

$$W^2 J_{WW} = -\gamma(1-\gamma)J, \qquad WJ_{XW} = \gamma(1-\gamma)J\frac{G_X}{G}, \qquad J_{XX} = \gamma J\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}.$$

間接効用関数 J の偏微分結果より，最適投資 (3.6) 式右辺の分子・分母は次のように表される．

$$\pi_t = (\gamma-1)J\left(\Lambda_t + \gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right), \quad (3.20)$$

$$W_t^2 J_{WW} = \gamma(\gamma-1)J. \tag{3.21}$$

ゆえに，最適投資 (3.6) 式に (3.20)(3.21) 式を代入すると，(3.15) 式を得る．

間接効用関数 J の偏微分方程式 (3.10) における第 2・第 3 項は，(3.20)(3.21) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' J_{XX}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^2 J_{WW}} \\
&= \frac{\gamma}{2}J\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}J\left(\Lambda_t + \gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right)'\left(\Lambda_t + \gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right) \\
&= J\left\{\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\Lambda_t'\Lambda_t - (\gamma-1)\Lambda_t'\Sigma'\frac{G_X}{G}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

偏微分方程式 (3.10) における第 6 項は，(3.5) 式を代入し整理すると，

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}c_t^* J_W = \frac{\gamma}{1-\gamma}\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}(1-\gamma)\frac{J}{G} = \gamma\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{J}{G}, \tag{3.23}$$

を得る．

(3.22)(3.23) 式等を偏微分方程式 (3.10) に代入し，両辺を γJ で除して整理すると，(3.16) 式が得られる． □

3.2.2. 準解析解の導出

偏微分方程式 (3.16) は非斉次項 $\alpha^{\frac{1}{\gamma}}$ を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．Liu [29] は，同方程式の非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式 (3.24) の初期値問題の解析解を利用した準解析解構成法を提示しているので，我々も同構成法により準解析解を導出する．

$$\frac{\partial}{\partial\tau}g(\tau,X) = \mathcal{L}g(\tau,X), \qquad g(0,X)=1, \tag{3.24}$$

ここで，$\tau = T-t$ である．

偏微分方程式 (3.24) の解は次式で表される．

$$g(\tau,X) = \exp\left(a_0(\tau) + a(\tau)'X + \frac{1}{2}X'A(\tau)X\right), \tag{3.25}$$

ここで，$A(\tau)$ は対称行列であり，係数体系 $(a_0(\tau), a(\tau), A(\tau))$ は (3.25) 式を (3.24) 式に代入した後に現れる X に関する恒等式 (3.27) から導かれる常微分方程式 (3.28)-(3.30) の解となる．

このとき，微分作用素 $\mathcal{L}$ の線形性により，偏微分方程式 (3.16) の解析解を次式で表現できる．

$$G(t,X) = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^{T-t} g(s,X)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(T-t,X). \tag{3.26}$$

(3.25) 式の関数 g に偏微分を施し，偏微分方程式 (3.24) に代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}a_0(\tau) + X'\frac{d}{d\tau}a(\tau) + \frac{1}{2}X'\frac{d}{d\tau}A(\tau)X = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'(aa' + A + aX'A + AXa' + AXX'A)\right] \\
&\quad + \left\{K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)X\right\}'(a+AX) \\
&\quad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\lambda'\lambda + 2\lambda'\Lambda X + X'\Lambda'\Lambda X) + \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r'X) + \frac{\beta}{\gamma}\right).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

上式は X に関する恒等式なので，次の (a_0, a, A) に関する常微分方程式が導出される．

$$\frac{d}{d\tau}a_0(\tau) = \frac{1}{2}a(\tau)'\Sigma\Sigma' a(\tau) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}[\Sigma\Sigma' A(\tau)] + \left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right)' a(\tau) - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 + \frac{\beta}{\gamma}\right), \qquad a_0(0) = 0. \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{d\tau}a(\tau) = \left\{A(\tau)\Sigma\Sigma' - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)'\right\}a(\tau) + A(\tau)\left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right) - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma}r\right), \qquad a(0) = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{d}{d\tau}A(\tau) = A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - 2\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' A(\tau) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0) = 0. \quad (3.30)$$

留意点 3.4. 本問題の解は，一般に潜在ファクターの *2* 次の項に依存しているが，*(3.30)* 式から明らかな通り，*2* 次の項の係数 $A(\tau)$ は，リスクの市場価格が一定の場合（$\Lambda = 0$），$A(\tau) = 0$ となり，消滅する．すなわち，本問題の解が潜在ファクターの *2* 次の項に依存するのは，リスクの市場価格を潜在ファクターのアフィン関数と仮定したことに起因している．

次の記法を用いる．

$$a_t^*(X_t) = \frac{\int_0^{T-t}\alpha^{\frac{1}{\gamma}}g(s,X_t)a(s)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(T-t,X_t)a(T-t)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^{T-t}g(s,X_t)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(T-t,X_t)}, \quad (3.31)$$

$$A_t^*(X_t) = \frac{\int_0^{T-t}\alpha^{\frac{1}{\gamma}}g(s,X_t)A(s)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(T-t,X_t)A(T-t)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^{T-t}g(s,X_t)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(T-t,X_t)}. \quad (3.32)$$

このとき，次の命題を得る．

命題 3.2. 仮定 *2.1*・*2.2*・*3.1* の下，本問題 *(3.3)* の最適消費および最適投資は次を満たしている．

$$c_t^* = \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}W_t^*}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^{T-t}g(s,X)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(T-t,X)}, \quad (3.33)$$

ここで，W_t^* は *(3.14)* 式で表されている．

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma}(\lambda + \Lambda X_t) + \Sigma'\big(a_t^*(X_t) + A_t^*(X_t)X_t\big), \quad (3.34)$$

ここで，(a_0, a, A) は *(3.35)-(3.37)* 式で表され，A は対称行列である．

$$a_0(\tau) = \int_0^\tau \left\{\frac{1}{2}a(s)'\Sigma\Sigma' a(s) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}[\Sigma\Sigma' A(s)] + \left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right)' a(s) - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 + \frac{\beta}{\gamma}\right)\right\}ds, \quad (3.35)$$

$$
\begin{aligned}
a(\tau) = \exp&\left(\int_0^\tau \left\{A(s)\Sigma\Sigma' - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)\right\} ds\right) \\
&\times \int_0^\tau \left\{A(s)\left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right) - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma}r\right)\right\} e^{\int_0^s \left(-A(t)\Sigma\Sigma' + K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)dt} ds,
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

$$
A(\tau) = C_2(\tau)C_1^{-1}(\tau), \tag{3.37}
$$

ここで，

$$
\begin{pmatrix} C_1(\tau) \\ C_2(\tau) \end{pmatrix} = \exp\left(\tau \begin{pmatrix} K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda & -\Sigma\Sigma' \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} I_N \\ 0_N \end{pmatrix}, \tag{3.38}
$$

ここで，0_N は $N \times N$ 零行列である．

留意点 3.5. 相対的リスク許容度が *1* の場合，常微分方程式 *(3.29)(3.30)* より，$(a, A) = (0, 0)$ となるので，これを *(3.31)(3.32)* 両式に代入すると，$(a^*, A^*) = (0, 0)$ となる．従って，*(3.34)* 式で表される最適投資の第 *2* 項である保険需要項は消滅する．

留意点 3.6. 準解析解が導出されたので，最適消費・富比率とリスク資産の最適投資比率が，非終端効用に対する加重 α，相対的リスク許容度 $1/\gamma$，状態変数 X_t，投資残存期間 τ の変化に伴い，いかなる変化を示すのか，比較静学が望まれる．

これらのうち，最適消費・富比率が非終端効用に対する加重 α の増加関数であることは，$\alpha \in (0, 1)$ で，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{c_t^*}{W_t^*} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\int_0^{T-t} g(s, X)\, ds + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X)\right\}^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha^2\gamma}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} g(T-t, X)\left\{\int_0^{T-t} g(s, X)\, ds + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X)\right\}^{-2} > 0,
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

から直ちに判明する．しかし，状態変数と最適消費・富比率の関係については，

$$
\frac{\partial}{\partial X_t}\frac{c_t^*}{W_t^*} = -\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{G_X(X_t)}{G^2(X_t)}, \tag{3.40}
$$

と偏導関数は導かれ，保険需要項の符号と関係付けられることは示されているものの，符号は判明しない．そして，相対的リスク許容度と最適消費・富比率の関係については，最適消費・富比率が (a_0, a, A) の関数であり，(a_0, a, A) が相対的リスク許容度の複雑な関数となっているため，解析的な比較静学は容易ではない．最適投資比率についても，同比率が (a_t^*, A_t^*) の関数であり，(a_t^*, A_t^*) が投資期間，非終端効用に対する加重，相対的リスク許容度，状態変数の複雑な関数となっており，解析的な比較静学は困難である．

証明. $a_0(\tau)$，$a(\tau)$ がそれぞれ (3.35) 式，(3.36) 式で表されることは容易に確認できるので，$A(\tau)$ が (3.37)(3.38) 式で表されることを証明する．

まず，$A(\tau)$ の転置行列を微分すると，$A(\tau)$ の対称性から次の常微分方程式を得る．

$$
\frac{d}{d\tau}A(\tau) = A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - 2A(\tau)\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0) = 0. \tag{3.41}
$$

(3.30) 式と (3.41) 式の両辺を辺々加え，2 で除すると，常微分方程式 (3.30) は次の Riccati 型微分方程式に帰着される．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}A(\tau) = A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' A(\tau) - A(\tau)\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right) \\
- \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0) = 0. \quad (3.42)
\end{aligned}
$$

ここからは，有本 [3] 定理 5.2 に沿って証明する．$N \times N$ の行列 $C_1(\tau)$，$C_2(\tau)$ に関する線形微分方程式の初期値問題を考察する．

$$
\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} C_1(\tau) \\ C_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda & -\Sigma\Sigma' \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(\tau) \\ C_2(\tau) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} C_1(\tau) \\ C_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_N \\ 0_N \end{pmatrix}. \tag{3.43}
$$

線形微分方程式 (3.43) の解は (3.38) 式で表される．$C_1(\tau)$ は正則であることが証明できる[5]ので，$A(\tau)$ を (3.37) 式で定義する．次の記法を用いる．

$$
\tilde{K} = K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda \tag{3.44}
$$

このとき，

$$
\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) = -C_1^{-1}(\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}C_1(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) \tag{3.45}
$$

となることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}A(\tau) &= \left\{\frac{d}{d\tau}C_2(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) + C_2(\tau)\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) \\
&= \left(-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda C_1(\tau) - \tilde{K}' C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) - A(\tau)\left(\tilde{K}C_1(\tau) - \Sigma\Sigma' C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) \\
&= A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - \tilde{K}' A(\tau) - A(\tau)\tilde{K} - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda,
\end{aligned}
$$

となり，$A(\tau)$ が Riccati 型微分方程式 (3.42) を満たしていることを確認できる．$A(\tau)$ の一意性は，有本 [3] 定理 5.2 の証明を参照せよ．最後に，$A(\tau)$ の対称性は，Riccati 型微分方程式 (3.42) および初期値の転置をとったとき，$A(\tau)'$ に関して同一の式が得られるので，解の一意性から $A(\tau)' = A(\tau)$ でなければならないことによる． □

3.3. 最適投資比率の典型例

標準ブラウン運動が N 次元で，非債券の主要指数が J 種類なので，物価連動債については，$I(= N - J)$ 群の投資対象を設定することにより，最適投資比率を決定できる．そこで，典型的な物価連動債投資戦略として，物価連動債投資比率密度，物価連動債投資比率をそれぞれ対象とする投資戦略を取り上げ，各戦略における最適投資比率を示す．

[5] 有本 [3] 定理 5.2 の証明を参照せよ．

3.3.1.　物価連動債投資比率密度を対象とする投資戦略

物価連動債の満期までの期間を I 群に区分し，各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を消費者が採用する場合を考察する．説明の便宜上，$\tau_0 = 0$，$\tau_I = \bar{\tau}$ と表記し，物価連動債の満期までの期間を $(\tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \cdots, (\tau_{I-1}, \tau_I]$ に区分する．また，投資比率密度過程を $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \cdots, \varphi_t^I)$ とするほか，次のように記法を定める．

$$\Phi_{1t} = \begin{pmatrix} \Phi_{1t}^P \\ \Phi_{1t}^S \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^P \\ B_1^S \end{pmatrix}, \tag{3.46}$$

ここで，

$$\Phi_{1t}^P = \begin{pmatrix} \varphi_t^1(\tau_1 - \tau_0) \\ \varphi_t^2(\tau_2 - \tau_1) \\ \vdots \\ \varphi_t^I(\tau_I - \tau_{I-1}) \end{pmatrix},\ \Phi_{1t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix},\ B_1^P = \begin{pmatrix} (\tau_1 - \tau_0)^{-1} \int_{\tau_0}^{\tau_1} b(\tau)' d\tau \\ (\tau_2 - \tau_1)^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} b(\tau)' d\tau \\ \vdots \\ (\tau_I - \tau_{I-1})^{-1} \int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I} b(\tau)' d\tau \end{pmatrix},\ B_1^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix}.$$

このとき，(2.20) 式および (3.34) 式より，最適投資比率 Φ_{1t}^* は次式で表される．

$$\Phi_{1t}^* = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B_1')^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + (B_1')^{-1}\big(a_t^*(X_t) + A_t^*(X_t)X_t\big). \tag{3.47}$$

なお，短期安全証券への最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \varphi_t^{*i}(\tau_i - \tau_{i-1}) - \sum_{j=1}^J \Phi_t^{*j}$ である．

3.3.2.　物価連動債投資比率を対象とする投資戦略

消費者が I 種類の一定満期の物価連動債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．投資対象物価連動債の満期を $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_I \leq \bar{\tau}$ とし，各満期の物価連動債への投資比率を $\Phi_P^1, \Phi_P^2, \cdots, \Phi_P^I$ とする．次のように記法を定める．

$$\Phi_{2t} = \begin{pmatrix} \Phi_{2t}^P \\ \Phi_{2t}^S \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} B_2^P \\ B_2^S \end{pmatrix}, \tag{3.48}$$

ここで，

$$\Phi_{2t}^P = \begin{pmatrix} \Phi_{Pt}^1 \\ \Phi_{Pt}^2 \\ \vdots \\ \Phi_{Pt}^I \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \quad B_2^P = \begin{pmatrix} b(\tau_1)' \\ b(\tau_2)' \\ \vdots \\ b(\tau_I)' \end{pmatrix}, \quad B_2^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix}.$$

このとき，(2.20) 式および (3.34) 式より，最適投資比率 Φ_{2t}^* は次式で表される．

$$\Phi_{2t}^* = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B_2')^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + (B_2')^{-1}\big(a_t^*(X_t) + A_t^*(X_t)X_t\big). \tag{3.49}$$

なお，短期安全証券への最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \Phi_{Pt}^{*i} - \sum_{j=1}^J \Phi_t^{*j}$ である．

4.　CRRA 効用消費者の無限時間証券投資問題

本章では，CRRA 効用消費者の無限時間証券投資問題考察する．本無限時間最適化問題では，Liu [29] の準解析解構成法を適用できないので，近似解析解を導出する．[6]

4.1.　無限時間の CRRA 効用と最適化問題

仮定 4.1. 消費者は次の *CRRA* 効用を予算制約式 *(2.21)* の下で最大化する．

$$U(c) = \mathrm{E}\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}dt\right]. \tag{4.1}$$

間接効用関数が次式で定義される．

$$J(\mathbb{X}_t) = \mathrm{E}\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}dt\right], \qquad \forall t \geq 0. \tag{4.2}$$

このとき，消費と投資の最適化問題と価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} J(\mathbb{X}_0). \tag{4.3}$$

4.2.　近似解析解の導出

HJB 方程式から推測された間接効用関数を構成する未知関数 $G(X_t)$ の偏微分方程式を導出した後，同方程式の非斉次項を Campbell and Viceira [15]，楠田 [25] の技法で近似して，近似解析解を導出する．

4.2.1.　価値関数の偏微分方程式の導出

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned}\sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}\Bigg\{&\begin{pmatrix} W_t\left(r_t+\Psi_t'\Lambda_t\right)-c_t \\ K(\theta-X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W \\ J_X\end{pmatrix} \\ &+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW} & J_{WX} \\ J_{XW} & J_{XX}\end{pmatrix}\right]-\beta J+\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Bigg\}=0, \\ &\text{s.t.}\quad \lim_{T\to\infty}\mathrm{E}[e^{-\beta T}J\left(\mathbb{X}_T\right)]=0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

HJB 方程式における最大化の必要条件から制御変数の最適解 $u^* = (c^*, \Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \tag{4.5}$$

$$\Psi_t^* = \frac{\pi_t}{W_t^{*2}V_{WW}}, \tag{4.6}$$

ここで，W_t^* は最適制御 u^* により達成される富過程であり，π_t は (3.7) 式で与えられている．

最適消費 (4.5) 式と最適投資 (4.6) 式を HJB 方程式 (4.4) に代入し，

$$W_tV_W\Lambda_t'\Psi_t^*+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX}\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'V_{XX}\right]-\frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}V_{WW}}, \tag{4.7}$$

[6] 本章は，バトボルド他 [6] の研究成果である．

に注意して整理すると，次の価値関数 V に関する偏微分方程式が得られる．

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}V_{WW}} + W_t^* r_t V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X + \frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{1-\frac{1}{\gamma}} - \beta V = 0. \quad (4.8)$$

上記偏微分方程式から価値関数 V は X_t の未知関数 $G(X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$V(\mathbb{X}_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\gamma}. \quad (4.9)$$

価値関数 V に偏微分を施し，(4.5)(4.6) 式に代入し，価値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (4.8) に代入すると，次の命題を得る．

命題 4.1. 仮定 *2.1*・*2.2*・*4.1* の下，本問題 *(4.3)* の価値関数，最適消費，最適投資は，それぞれ *(4.9)* 式，*(4.10)* 式，*(4.11)* 式で表される．ここで，$G(X_t)$ は *2* 階の偏微分方程式 *(4.12)* の解である．

$$c_t^* = \frac{W_t}{G}, \quad (4.10)$$

$$\varPsi_t^* = \frac{1}{\gamma}\Lambda_t + \Sigma'\frac{G_X}{G}, \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] + \left\{K(\theta - X) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda_t\right\}'\frac{G_X}{G} + \frac{1}{G} - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Lambda_t'\Lambda_t + \frac{\gamma-1}{\gamma}r_t + \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0. \quad (4.12)$$

証明．まず，最適消費は，

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \left\{\left(\frac{G}{W_t^*}\right)^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t^*}{G}.$$

次に，価値関数 V に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$W_t V_W = (1-\gamma)V, \qquad V_X = \gamma V\frac{G_X}{G}, \qquad W_t^2 V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V,$$

$$W_t V_{XW} = \gamma(1-\gamma)V\frac{G_X}{G}, \qquad V_{XX} = \gamma V\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}.$$

価値関数の偏微分結果より，最適投資 (4.6) 式右辺の分子・分母は次のように表される．

$$\pi_t = (\gamma-1)V\left(\Lambda_t + \gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right), \quad (4.13)$$

$$W_t^{*2}V_{WW} = \gamma(\gamma-1)V. \quad (4.14)$$

ゆえに，最適投資 (4.6) 式に (4.13)(4.14) 式を代入すると，(4.11) 式を得る．

価値関数の偏微分方程式 (4.8) における第 2 項までは，(4.13)(4.14) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}V_{WW}} \\
&\quad = \frac{\gamma}{2}V\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left\{\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}V\left(\Lambda_t + \gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right)'\left(\Lambda_t + \gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right) \\
&\quad = V\left\{\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\Lambda_t'\Lambda_t - (\gamma-1)\Lambda_t'\Sigma'\frac{G_X}{G}\right\}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

間接効用関数の偏微分方程式 (4.8) における第 5 項は，(4.5) 式を代入し整理すると，

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} V_W^{1-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{W^*} \left\{ \left(\frac{G}{W^*} \right)^{\gamma} \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{G}, \tag{4.16}$$

を得る．

(4.15)(4.16) 式等を価値関数の偏微分方程式 (4.8) に代入し，両辺を γV で除して整理すると，(4.12) 式が得られる． □

4.2.2. 偏微分方程式の解析解導出可能性

偏微分方程式 (4.12) は非斉次項 $1/G$ を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．同偏微分方程式の解法として，Liu [29] は，次の偏微分方程式の初期値問題の解析解が導出できることに着目した．

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} F(\tau, X) + \mathcal{L} F(\tau, X) = 0, \qquad F(0, X) = 1. \tag{4.17}$$

ここで，$\mathcal{L}$ は次式で定義される線形微分作用素である．

$$\mathcal{L} F = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left[\Sigma \Sigma' F_{XX} \right] + \left\{ K(\theta - X_t) - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \Sigma \Lambda_t \right\}' F_X - \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma^2} \Lambda_t' \Lambda_t + \frac{\gamma - 1}{\gamma} r_t + \frac{\beta}{\gamma} \right) F. \tag{4.18}$$

偏微分方程式 (4.17) の解は，

$$F(\tau, X) = \exp\left(a_0(\tau) + a(\tau)' X + \frac{1}{2} X' A(\tau) X \right), \tag{4.19}$$

と表現でき，係数体系 $(a_0(\tau), a(\tau), A(\tau))$ は (4.19) 式を (4.17) 式に代入した後に現れる X に関する恒等式から導かれる，初期条件 $a_0(0) = 0, a(0) = 0, A(0) = 0$ の Riccati 方程式の解となる．

Kraft *et al.* [23] は，同解 F が次式の意味で可積分であれば，微分作用素 $\mathcal{L}$ の線形性により，偏微分方程式 (4.12) の解析解を次式で表現できることを示している．

$$G(X_t) = \int_0^\infty F(\tau, X_t)\, d\tau = \int_0^\infty \exp\left(a_0(\tau) + a(\tau)' X_t + \frac{1}{2} X_t' A(\tau) X_t \right) d\tau. \tag{4.20}$$

しかし，Kraft *et al.* [23] は 2 ファクターの特定の問題において可積分条件を提示しているに過ぎず，一般に可積分条件は非常に厳しい．本稿では，状態変数 X_t が多次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程に従っているので，定義域は $\mathbb{R}^N$ であり，$N \geq 3$ を想定しているが，このとき，上記 Riccati 方程式の解として導出される係数体系 $(a_0(\tau), a(\tau), A(\tau))$ が次の可積分条件，$\exists \alpha > 1 \quad \text{s.t.}$

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau^{\alpha} \exp\left(a_0(\tau) + a(\tau)' x + \frac{1}{2} x' A(\tau) x \right) < \infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.21}$$

を満たすことは考え難く，本問題への適用は事実上不可能である．

4.2.3. 偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

一方，偏微分方程式 (4.12) の数値解法についても，3 変数以上の高次元の場合，有限差分法等の数値解法を適用することは難しい．そこで本稿では，近似解析解の導出を検討する．

近似解析解導出法として，Campbell and Viceira [15] が，消費と 2 証券投資の最適化問題で常微分方程式の近似解析解を導出する際に適用した非斉次項の対数線形近似法に我々は着目した．彼等は，(4.5) 式より，非斉次項 $1/G(X_t)$ が消費・富比率 c_t^*/W_t^* と等しく，同比率が安定的であることに着目し，$1/G(X_t)$ を $\mathrm{E}[\log\{c_t^*/W_t^*\}]$ の周りで対数線形近似している．但し，この場合，$\mathrm{E}[\log\{c_t^*/W_t^*\}]$ は時間変数に依存する．そこで，楠田 [25] は一定値をとる $\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[\log\{c_t^*/W_t^*\}]$ の周りで対数線形近似を行っている．本稿も楠田 [25] に従って非斉次項を次のように対数線形近似する．

$$\frac{1}{G(X_t)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t), \tag{4.22}$$

ここで，

$$g_0 = g_1(1 - \log g_1), \tag{4.23}$$

$$g_1 = \exp\Big(\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\Big[\log\Big(\frac{c_t^*}{W_t^*}\Big)\Big]\Big). \tag{4.24}$$

関数 G の偏微分方程式 (4.12) における非斉次項 $1/G$ を (4.22) 式で近似し，Λ_t，r_t に，それぞれ (2.3) 式，(2.4) 式を代入すると，次の近似偏微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] + \left\{K(\theta - X_t) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma(\lambda+\Lambda X_t)\right\}'\frac{G_X}{G} - g_1\log G \\ + g_0 - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\lambda+\Lambda X_t)'(\lambda+\Lambda X_t) - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r_1'X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0.\end{aligned} \tag{4.25}$$

近似偏微分方程式 (4.25) の解は次式で表される 2 次形式の指数関数であることが推測される．

$$G(X_t) = \exp\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right). \tag{4.26}$$

ここで，A は一般性を失うことなく対称行列である．

このとき，

$$g_1 = \exp\left(-\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\left[\log G(X_t)\right]\right) = \exp\left(\lim_{t\to\infty}\left[-a_0 - a'\mathrm{E}[X_t] - \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_t'AX_t]\right]\right), \tag{4.27}$$

は次の補題で計算される．

補題 4.1. 仮定 *2.1*・*2.2*・*4.1* の下，g_1 は (a_0, a, A) により次式で表される．

$$g_1 = \exp\left(-a_0 - a'\theta - \frac{1}{2}\left(\theta' A\,\theta + \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)'MQ^{-1}\Sigma\right]\right)\right), \tag{4.28}$$

ここで，行列 P の第 (i,j) 成分を P_{ij} と表記すると，

$$M_{ij} = \frac{1}{l_i + l_j}(Q'A\,Q)_{ij}.$$

証明. X_t は線形確率微分方程式 (2.1) の解として，次のように表される．

$$X_t = Qe^{-tL}Q^{-1}X_0 + Q\left(I_N - e^{-tL}\right)Q^{-1}\theta + Q\int_0^t e^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\, dB_s.$$

よって，$\lim_{t\to\infty} e^{-tL} = 0, \mathrm{E}[dB_s] = 0$ に注意すると，$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[X_t] = \theta,$ が得られる．
　次に，

$$\begin{aligned} X_t'AX_t = &\left\{Qe^{-tL}Q^{-1}X_0 + Q\left(I_N - e^{-tL}\right)Q^{-1}\theta + Q\int_0^t e^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\, dB_s\right\}' \\ &\qquad A\left\{Qe^{-tL}Q^{-1}X_0 + Q\left(I_N - e^{-tL}\right)Q^{-1}\theta + Q\int_0^t e^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\, dB_s\right\}. \end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{E}[dB_s dB_t'] = \delta_{st} I ds$ に注意すると，

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[X_t'AX_t] &= \theta' A\,\theta + \lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)' e^{-(t-s)L}Q'A\,Qe^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\right] ds \\ &= \theta' A\,\theta + \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)'\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-(t-s)L}Q'A\,Qe^{-(t-s)L} ds\, Q^{-1}\Sigma\right] \\ &= \theta' A\,\theta + \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)' M Q^{-1}\Sigma\right]. \end{aligned}$$

以上より，(4.28) 式が導かれる．　□

4.2.4.　近似解析解

　関数 G に偏微分を施し，偏微分方程式 (4.25) に代入し，g_0 に (4.23) 式を代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left(aa' + A + aX_tA' + AX_ta' + AX_tX_t'A\right)\right] \\ &\qquad + \left\{K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)X_t\right\}'(a + AX_t) \\ &\quad + g_1(1 - \log g_1) - g_1\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right) - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\left(\lambda'\lambda + 2\lambda'\Lambda X_t + X_t'\Lambda'\Lambda X_t\right) \\ &\qquad - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r'X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

　上式は X_t に関する恒等式なので，次の (a_0, a, A) に関する代数方程式が導出される．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}a'\Sigma\Sigma'a + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma'A] + \left\{K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right\}'a \\ &\qquad + g_1(1 - a_0 - \log g_1) - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 - \frac{\beta}{\gamma} = 0, \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$A\Sigma\Sigma'a + AK\theta - K'a - \frac{\gamma-1}{\gamma}(A\Sigma\lambda + \Lambda'\Sigma'a) - g_1 a - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_1 = 0, \tag{4.31}$$

$$\frac{1}{2}A\Sigma\Sigma'A - \left(K' + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Lambda'\Sigma'\right)A - \frac{1}{2}g_1 A - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Lambda'\Lambda = 0, \tag{4.32}$$

ここで，g_1 は (4.28) 式で表されている．

但し，上記価値関数を構成する未知関数が近似偏微分方程式 (4.25) の解として近似されている場合の価値関数，最適消費，最適投資をそれぞれ「近似間接効用関数」,「近似最適消費」,「近似最適投資」と呼び，$\tilde{V}, \tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*$ と表記する．このとき，次の命題を得る．

命題 4.2. 仮定 *2.1*・*2.2*・*4.1* の下，本問題 *(4.3)* の近似間接効用関数，近似最適消費，近似最適投資は次を満たしている．

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}(\mathbb{X}_t) &= \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left[\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right], && (4.33)\\
\tilde{c}_t^* &= \exp\left[-\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right]W_t, && (4.34)\\
\tilde{\Psi}_t^* &= \frac{1}{\gamma}\left(\lambda + \Lambda X_t\right) + \Sigma'\left(a + AX_t\right), && (4.35)
\end{aligned}
$$

ここで，(a_0, a, A) は代数方程式 *(4.30)-(4.32)* の解である．

留意点 4.1. 近似最適投資 *(4.35)* 式を前章の最適投資 *(3.34)* 式と比較すると，将来の潜在ファクターの変化を考慮しない第 *1* 項の近視眼的需要項は同一であるが，将来の潜在ファクターの変化に保険を掛ける第 *2* 項の保険需要項は，本来，状態変数 X_t に依存する $(a^*(X_t), A(X_t^*))$ を定数とみなしていることが分かる．この近似における単純化による代償の大きさについては，実証分析に委ねられる．

4.3. 最適解の十分条件

代数方程式 (4.30)-(4.32) の解は一般に非最適解を含めて複数存在する．そこで，Maslowski and Veverka [32] を応用して最適解の十分条件を提示する．

4.3.1. 一般化 Hamiltonian 関数による本問題の再定式化

本問題を Maslowski and Veverka [32] で定義されている一般化 Hamiltonian 関数により再定式化するため，本問題の状態過程 $\mathbb{X}_t' = (W_t, X_t')$ の確率微分方程式を次のように表現する．

$$
d\mathbb{X}_t = \mu(\mathbb{X}_t, u_t)\,dt + \sigma(\mathbb{X}_t, u_t)\,dB_t, \tag{4.36}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\mu(\mathbb{X}_t, u_t) &= \begin{pmatrix} W_t\left(r_t + \Psi_t'\Lambda_t\right) - c_t \\ K(\theta - X_t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t\left\{r_0 + \Psi_t'\lambda + (r' + \Psi_t'\Lambda)X_t\right\} - c_t \\ K(\theta - X_t)\end{pmatrix}, && (4.37)\\
\sigma(\mathbb{X}_t, u_t) &= \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}, && (4.38)
\end{aligned}
$$

である．

また，補助過程 (q_t, R_t) を次のように表記する．

$$
q_t = \begin{pmatrix} q_{tW} \\ q_{tX}\end{pmatrix}, \qquad R_t = \begin{pmatrix} R_{tW} \\ R_{tX}\end{pmatrix},
$$

ここで，q_{tW} はスカラー，q_{tX} は $N \times 1$ ベクトル，R_{tW} は $1 \times N$ ベクトル，R_{tX} は $N \times N$ 行列である．

このとき，本最適化問題 (4.3) の一般化 Hamiltonian 関数 H は次式で表される．

$$H(\mathbb{X},u,q,R)=\{W\{r_0+\Psi_t'\lambda+(r'+\Psi_t'\Lambda)X\}-c\}q_W+(K\theta-Kx)'q_X \\ +\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}W\Psi'\\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}R_W\\ R_X\end{pmatrix}\right]+\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\beta(wq_w+x'q_x). \quad (4.39)$$

4.3.2. 制御過程及び補助過程の最適解

最適解は状態変数に関する（前進）確率微分方程式 (4.36) 及び補助過程に関する次の後退確率微分方程式から構成される前進・後退確率微分方程式体系を満たしている（Maslowski and Veverka [32]）．

$$-dq_t=\left(\mu_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}_t,u_t)q_t+\sum_{n=1}^{N}\sigma^n(\mathbb{X}_t,u_t)R_t^n-\beta q_t\right)dt-R_tdB_t, \quad (4.40)$$

ここで，σ^n, R_t^n は，それぞれ σ, R_t の第 n 列である．

このとき，次の補題を得る．

補題 4.2. 仮定 *2.1*，*2.2*，*4.1* の下，本問題 *(4.3)* の一般化 *Hamiltonian* 関数 H における最適解 (u_t^*,q_t^*,R_t^*) は次の *2* 条件を満たしている．

1. 制御過程 $u_t^*=(c_t^*,\Psi_t^*)$ は *(4.5)(4.6)* 両式を満たしている．

2. 補助過程 (q_t^*,R_t^*) は次を満たしている．

$$q_t^* = \begin{pmatrix}J_W(\mathbb{X}_t^*)\\ J_X(\mathbb{X}_t^*)\end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

$$R_t^* = \begin{pmatrix}J_{WW}(\mathbb{X}_t^*) & J_{WX}(\mathbb{X}_t^*)\\ J_{XW}(\mathbb{X}_t^*) & J_{XX}(\mathbb{X}_t^*)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_t^*\Psi_t^*\\ \Sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W_t^*J_{WW}(\mathbb{X}_t^*)(\Psi_t^*)'+J_{WX}(\mathbb{X}_t^*)\Sigma\\ W_t^*J_{XW}(\mathbb{X}_t^*)(\Psi_t^*)'+J_{XX}(\mathbb{X}_t^*)\Sigma\end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

ここで，J は *HJB* 方程式 (4.4) の解である．

証明. 先ず，一般化 Hamitonian 関数 (4.39) 式の補助過程 (q_t,R_t) に (4.41)(4.42) 式を代入し，最大化問題を解くと，最適制御変数 $u_t^*=(c_t^*,\Psi_t^*)$ は (4.5)(4.6) 両式を満たしていることが確認できる．このとき，これら最適制御過程が代入された HJB 方程式 (4.7) の J_Z に (4.41) 式を代入すると，次式が成立している（時間変数は省略，以下同様）．

$$\mu'q+\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\sigma\sigma'\mu_{\mathbb{X}}]-\beta J+\frac{c^{*(1-\gamma)}}{1-\gamma}=0. \quad (4.43)$$

上式を状態過程の第 i 成分 Z_i で偏微分し，整理すると，次式を得る．

$$\mu'q_{\mathbb{X}_i}+\mu_{\mathbb{X}_i}'q+\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\sigma_t\sigma'q_{\mathbb{X}\mathbb{X}_i}]+\operatorname{tr}\left[q_{\mathbb{X}}\sigma\sigma_{\mathbb{X}_i}'\right]-\beta q_i \\ +c_{\mathbb{X}_i}^*\left\{\mu_{c^*}'q+(c^*)^{-\gamma}\right\}+\Psi_{\mathbb{X}_i}^*\{\mu_{\Psi^*}'q+\operatorname{tr}[q_{\mathbb{X}}\sigma\sigma_{\Psi^*}']\}=0. \quad (4.44)$$

上式における第 6・7 項については，$u_t^*=(c_t^*,\Psi_t^*)$ が最適制御過程であることに留意すると，

$$\mu_{c^*}'q+(c^*)^{-\gamma}=0, \qquad \mu_{\Psi^*}'q+\operatorname{tr}[q_{\mathbb{X}}\sigma\sigma_{\Psi^*}']=0.$$

従って，次式を得る．

$$\mu' q_{\mathbb{X}_i} + \mu'_{\mathbb{X}_i} q + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma_t \sigma' q_{\mathbb{X}\mathbb{X}_i}\right] + \mathrm{tr}\left[q_{\mathbb{X}} \sigma \sigma'_{\mathbb{X}_i}\right] - \beta q_i = 0. \tag{4.45}$$

他方，q_i^* を微分すると，伊藤の補題により，次式を得る．

$$-dq_i^* = -\left(q_{i\mathbb{X}}^* + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\sigma\sigma' q_{i\mathbb{X}\mathbb{X}}^*\right]\right) dt - (q_{i\mathbb{X}}^*)' \sigma dB_t. \tag{4.46}$$

上式を (4.45) 式と $R_i^* = q_z \sigma$ を用いて変形すると，(q_t^*, R_t^*) が後退確率微分方程式 (4.40) を満たしていることが確認できる． □

4.3.3.　十分条件

$u^* = (c^*, \Psi^*)$ が最適解であるための十分条件は，最適解の存在を保証する正則条件（リプシッツ条件及び線形成長条件）[7] の下，関数 $(\mathbb{X}, u) \to H(\mathbb{X}, u, q_t^*, R_t^*)$ が凹関数であることである．そこで，同関数の凹性を条件として示すために，一般化 Hamiltonian 関数 (4.39) 式を偏微分すると，Hessian H は次のように表される．

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} 0 & H_{WX} & 0 & H_{W\Psi} \\ H_{XW} & 0 & 0 & H_{X\Psi} \\ 0 & 0 & H_{cc} & 0 \\ H_{\Psi W} & H_{\Psi X} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.47}$$

ここで，

$$\begin{aligned} H_{XW} &= J_W(r + \Psi' \Lambda), \\ H_{cc} &= -\gamma\, c^{-(\gamma+1)}, \\ H_{\Psi W} &= J_W(\lambda + \Lambda x) + W_t J_{WW} \Psi_t^* + \Sigma' J_{XW}, \\ H_{\Psi X} &= W J_W \Lambda. \end{aligned}$$

上式群における間接効用関数 J の偏微分を数値解法で計算できる場合は，最適解の十分条件は上記 Hessian H が負定符号となることである．

最後に，間接効用関数 J の偏微分を数値解法で計算出来ない場合を考察する．この場合は，Hessian H における間接効用関数 J を近似間接効用関数 $\tilde{J}$ に置き換えると，本問題の近似間接効用関数の最適性を検証するための近似 Hessian $\tilde{\mathsf{H}}$ は次のように表される．

$$\tilde{\mathsf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{H}_{WX} & 0 & \tilde{H}_{W\Psi} \\ \tilde{H}_{XW} & 0 & 0 & \tilde{H}_{X\Psi} \\ 0 & 0 & \tilde{H}_{cc} & 0 \\ \tilde{H}_{\Psi W} & \tilde{H}_{\Psi X} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

[7]本モデルにおける状態変数は，このままでは正則条件を満たしていないので，正則条件を満たすように，ドリフト及び拡散係数は十分大きな定数以下であると仮定する．

ここで，

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_{XW} &= W_t^{*-\gamma} \exp\left[\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right](r + \Psi'\Lambda), \\
\tilde{H}_{cc} &= -\gamma\, c^{-(\gamma+1)}, \\
\tilde{H}_{\Psi W} &= W_t^{*-\gamma} \exp\left[\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right]\left\{(\lambda + \Lambda X) - \gamma\tilde{\Psi}_t^* + \gamma\Sigma'(a + AX_t)\right\}, \\
\tilde{H}_{\Psi X} &= WW_t^{*-\gamma} \exp\left[\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right]\Lambda.
\end{aligned}
$$

従って，状態変数・制御変数空間の実用上適切な領域において偏微分方程式の対数線形近似の精度が十分に高く，それゆえ，近似間接効用関数 (4.33) 式の近似精度が十分に高いのであれば，最適解の十分条件として，関数 $(\mathbb{X}, u) \to H(\mathbb{X}, u, q_t^*, R_t^*)$ の凹性を近似的に意味する，近似 Hessian $\tilde{\mathsf{H}}$ が負定符号であることが利用できる．

5. Epstein-Zin 効用消費者の無限時間証券投資問題

本章では，Epstein-Zin 効用消費者の無限時間証券投資問題を考察する．[8]

5.1. Epstein-Zin 効用と消費者の最適化問題

従来，標準的効用として仮定されてきた CRRA 効用は，異時点間代替弾力性の逆数である異時点間消費の変動に対する回避度（本稿では,「相対的異時点間変動回避度」と呼ぶ）が相対的危険回避度と等しいことを仮定している．しかし，多くの実証分析では，同仮定は支持されていない．そこで本章では，相対的危険回避度一定効用を拡張し，相対的危険回避度と相対的異時点間変動回避度を分離した Epstein-Zin 効用（Epstein and Zin [19]）を仮定する．

Epstein-Zin 効用自体は離散時間で定義されているので，本稿では，Duffie and Epstein [16] による同効用の連続時間版の表現を採用する．

仮定 5.1. 消費者は次式で再帰的に定義される *Epstein-Zin* 効用汎関数 $U_0(c)$ を予算制約式 *(2.21)* の下で最大化する．

$$U_t(c) = \mathrm{E}_t\left[\int_t^\infty f(c_s, U_s(c))\, ds\right], \qquad \forall t \geq 0, \tag{5.1}$$

ここで，

$$f(c_s, U_s) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{1-\zeta}(1-\gamma)U_s\left\{\left(\dfrac{c_s}{\big((1-\gamma)U_s\big)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)^{1-\zeta} - 1\right\}, & \text{if} \quad \zeta \neq 1, \\ \\ \beta(1-\gamma)U_s\left\{\log c_s - \dfrac{1}{1-\gamma}\log\big((1-\gamma)U_s\big)\right\}, & \text{if} \quad \zeta = 1, \end{cases} \tag{5.2}$$

ここで，γ は相対的危険回避度，ζ は相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）である．先行実証研究の結果を踏まえて，$\gamma > 1$，$\zeta > 0$ と仮定する．

間接効用汎関数が次式で再帰的に定義される．

$$J(\mathbb{X}_t^u) = \mathrm{E}_t\left[\int_t^\infty f(c_s, J(\mathbb{X}_s^u))\, ds\right], \qquad \forall t \geq 0. \tag{5.3}$$

本稿における消費と投資の最適化問題と価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} J(\mathbb{X}_0). \tag{5.4}$$

5.2. 一般の Epstein-Zin 効用に対する近似解析解

本節では，一般の Epstein-Zin 効用に対し，HJB 方程式から推測された価値関数を構成する未知関数 $G(X_t)$ の偏微分方程式を導出した後，同方程式の非斉次項を Campbell and Viceira [15]，楠田 [25] の技法で近似して，近似解析解を導出する．

[8] 本章は，バトボルド他 [12] の研究成果である．

5.2.1. 価値関数の偏微分方程式の導出

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}\left\{\begin{pmatrix} W_t^u\left(r_t+\Psi_t'\Lambda_t\right)-c_t \\ K(\theta-X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W(\mathbb{X}_t^u) \\ J_X(\mathbb{X}_t^u)\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t^u\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t^u\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{WX}(\mathbb{X}_t^u) \\ J_{XW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{XX}(\mathbb{X}_t^u)\end{pmatrix}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta}J(\mathbb{X}_t^u)\left\{\left(\frac{c_t}{\big((1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)\big)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)^{1-\zeta}-1\right\}\right\}=0, \quad (5.5)$$
$$\text{s.t.}\quad \lim_{T\to\infty}E[e^{-\nu T}|J\left(\mathbb{X}_T^u\right)|]=0,$$

ここで，ν はある正の定数である．

HJB 方程式左辺の最大化の必要条件から最適制御 $u^*=(c^*,\Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^* = \beta^{\frac{1}{\zeta}}V_W^{-\frac{1}{\zeta}}\left\{\big((1-\gamma)V\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{(1-\gamma)\zeta}}\right\}, \quad (5.6)$$

$$\Psi_t^* = \frac{\pi_t}{W_t^{*2}V_{WW}}, \quad (5.7)$$

ここで，W_t^* は $W_t^{u^*}$ を簡略表記したものであり，

$$\pi_t=-W_t^*\left\{V_W\Lambda_t+\Sigma'V_{XW}\right\}. \quad (5.8)$$

最適消費 (5.6) 式と最適投資 (5.7) 式を HJB 方程式 (5.5) に代入し，(5.7) 式から導かれる次式，

$$W_t^*V_W\Lambda_t'\Psi_t^*+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX}\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'V_{XX}\right]-\frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}V_{WW}}, \quad (5.9)$$

に注意して整理すると，次の価値関数 V に関する偏微分方程式が得られる．

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'V_{XX}\right]-\frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}V_{WW}}+W_t^*r_tV_W+\{K(\theta-X_t)\}'V_X$$
$$-c_t^*V_W+\frac{\beta}{1-\zeta}(c_t^*)^{1-\zeta}\big((1-\gamma)V\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}}-\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta}V=0. \quad (5.10)$$

上記偏微分方程式から価値関数は，状態変数 X_t の未知関数 $G(X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$V(\mathbb{X}_t)=\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}}. \quad (5.11)$$

従って，HJB 方程式左辺の最大化の十分条件が満たされることは，次式で表される Hessian $\mathbf{H}_{\mathrm{HJB}}$ が任意の制御変数 $(c,\Psi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N$ に対し負定符号であることで確認できる．

$$\mathbf{H}_{\mathrm{HJB}}=\begin{pmatrix} -\beta\zeta\big((1-\gamma)V\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}}c^{-\zeta-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma(W_t^*)^{-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma(W_t^*)^{-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}}\end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

価値関数 V に偏微分を施し，(5.6)(5.7) 両式に代入し，価値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (5.10) に代入すると，次の命題を得る．

命題 5.1. 仮定 *2.1*・*2.2*・*5.1* の下，本問題 *(5.4)* の価値関数，最適消費，最適投資は，それぞれ *(5.11)* 式，*(5.13)* 式，*(5.14)* 式で表される．ここで，$G(X_t)$ は偏微分方程式 *(5.15)* の解である．

$$
\begin{aligned}
c_t^* &= \beta^{\frac{1}{\zeta}} \frac{W_t^*}{G}, &(5.13)\\
\Psi_t^* &= \frac{1}{\gamma}\Lambda_t + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\zeta}{\zeta-1}\Sigma'\frac{G_X}{G}, &(5.14)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-\zeta}{2(1-\zeta)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G} + \left\{\gamma K(\theta - X_t) + (1-\gamma)\Sigma\Lambda_t\right\}'\frac{G_X}{G} + \frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma}{G} + \frac{1-\zeta}{2\zeta}\Lambda_t'\Lambda_t + \frac{\gamma(1-\zeta)}{\zeta}r_t - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0. \tag{5.15}
$$

留意点 5.1. 留意点 *3.3* で既にみたように，相対的危険回避度は，単位投資リスク当たりの対価を相対的に低く評価する一方，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を相対的に高く評価する度合と解釈された．これに対し，相対的異時点間変動回避度は，重み付けに対する影響を有していない．これは，異時点間変動回避度が，危険回避度とは異なり，異なる状態間の変化とは無関係な係数であることに起因していると解釈できる．その代わり，相対的異時点間変動回避度は，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値自体に影響を及ぼしている．

証明．まず，最適消費は，

$$
c_t^* = \beta^{\frac{1}{\zeta}}\left(\frac{(1-\gamma)V}{W_t^*}\right)^{-\frac{1}{\zeta}}\left((1-\gamma)V\right)^{-\frac{\gamma-\zeta}{(1-\gamma)\zeta}} = \beta^{\frac{1}{\zeta}}{W_t^*}^{\frac{1}{\zeta}}\left({W_t^*}^{1-\gamma}G^{\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}}\right)^{-\frac{1-\zeta}{(1-\gamma)\zeta}} = \beta^{\frac{1}{\zeta}}\frac{W_t^*}{G}.
$$

次に，価値関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$
W_t^* V_W = (1-\gamma)V, \qquad V_X = \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}V\frac{G_X}{G}, \qquad W_t^{*2}V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V,
$$

$$
W_t^* V_{XW} = \frac{(1-\gamma)^2\zeta}{1-\zeta}V\frac{G_X}{G}, \qquad V_{XX} = \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}V\left\{\frac{(2-\gamma)\zeta-1}{1-\zeta}\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}.
$$

価値関数の偏微分結果より，最適投資 (5.7) 式右辺の分子・分母は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
\pi_t &= -(1-\gamma)V\left(\Lambda_t + \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}\Sigma'\frac{G_X}{G}\right), &(5.16)\\
W_t^{*2}V_{WW} &= -\gamma(1-\gamma)V. &(5.17)
\end{aligned}
$$

ゆえに，最適投資 (5.7) 式に (5.16)(5.17) 式を代入すると，(5.14) 式を得る．

価値関数 V の偏微分方程式 (5.10) における第 2 項までは，(5.16)(5.17) 式を代入し整理す

ると，次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}V_{WW}} &= \frac{(1-\gamma)\zeta}{2(1-\zeta)} V \operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left(\frac{(2-\gamma)\zeta-1}{1-\zeta}\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1-\gamma}{2\gamma} V\left(\Lambda_t + \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}\Sigma'\frac{G_X}{G}\right)'\left(\Lambda_t + \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}\Sigma'\frac{G_X}{G}\right) \\
&= V\left\{\frac{(1-\gamma)\zeta}{2(1-\zeta)}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] + \frac{1-\gamma}{2\gamma}\Lambda_t'\Lambda_t + \frac{(1-\gamma)^2\zeta}{\gamma(1-\zeta)}\Lambda_t'\Sigma'\frac{G_X}{G}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{(1-\gamma)\zeta(\gamma-\zeta)}{2\gamma(1-\zeta)^2}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right\}. \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

価値関数の偏微分方程式 (5.10) における第 5・6 項は，

$$
-V_W + \beta(c_t^*)^{-\zeta}\big((1-\gamma)V\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} = 0, \qquad (5.19)
$$

に注意し，最後に (5.6) 式を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&-c_t^* V_W + \frac{\beta}{1-\zeta}(c_t^*)^{1-\zeta}\big((1-\gamma)V\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} \\
&\quad = c_t^*\left\{-V_W + \beta(c_t^*)^{-\zeta}\big((1-\gamma)V\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}}\right\} + \frac{\zeta}{1-\zeta}\beta(c_t^*)^{1-\zeta}\big((1-\gamma)V\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} \\
&\quad = \frac{\zeta}{1-\zeta}c_t^* V_W = \frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}}(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}\frac{V}{G}, \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

を得る．

(5.18)(5.20) 式等を価値関数の偏微分方程式 (5.10) に代入し，両辺を

$$
\frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)}V
$$

で除して整理すると，(5.15) 式が得られる． □

5.2.2. 偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

前章と同様に，偏微分方程式 (5.15) における非斉次項 $1/G$ を (4.22) 式で近似し，Λ_t，r_t に，それぞれ (2.3) 式，(2.4) 式を代入すると，次の近似偏微分方程式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-\zeta}{2(1-\zeta)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G} + \big\{\gamma K(\theta - X_t) + (1-\gamma)\Sigma(\lambda + \Lambda X_t)\big\}'\frac{G_X}{G} \\
&\quad - \beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1 \log G + \beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_0 + \frac{1-\zeta}{2\zeta}(\lambda + \Lambda X_t)'(\lambda + \Lambda X_t) + \frac{\gamma(1-\zeta)}{\zeta}(r_0 + r'X_t) - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0.
\end{aligned}
\qquad (5.21)
$$

近似偏微分方程式 (5.21) の解が次式で表される X_t の 2 次形式の指数関数であることが推測される．

$$
G(X_t) = \exp\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t' A X_t\right). \qquad (5.22)
$$

ここで，A は一般性を失うことなく対称行列である．

5.2.3. 近似解析解

関数 G に偏微分を施し，偏微分方程式 (5.21) に代入し，g_0 に (4.23) 式を代入すると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left(aa' + A + aX_t'A + AX_ta' + AX_tX_t'A\right)\right] - \frac{\gamma-\zeta}{2(1-\zeta)}\left(a' + X_t'A\right)\Sigma\Sigma'\left(a + AX_t\right) \\
&\qquad + \left\{\gamma K\theta + (1-\gamma)\Sigma\lambda - \big(\gamma K - (1-\gamma)\Sigma\Lambda\big)X_t\right\}'(a + AX_t) \\
&+ \beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1(1-\log g_1) - \beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right) + \frac{1-\zeta}{2\zeta}\left(\lambda'\lambda + 2\lambda'\Lambda X_t + X_t'\Lambda'\Lambda X_t\right) \\
&\qquad + \frac{\gamma(1-\zeta)}{\zeta}(r_0 + r'X_t) - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0. \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

上式は X_t に関する恒等式なので，次の (a_0, a, A) に関する代数方程式が導出される．

$$
\frac{(1-\gamma)\zeta}{2(1-\zeta)}A\Sigma\Sigma'A - \big(\gamma K' - (1-\gamma)\Lambda'\Sigma'\big)A - \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1 A + \frac{1-\zeta}{2\zeta}\Lambda'\Lambda = 0, \qquad (5.24)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}A\Sigma\Sigma'a + \gamma(AK\theta - K'a) + (1-\gamma)(A\Sigma\lambda + \Lambda'\Sigma'a) \\
&\qquad - \beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1 a + \frac{1-\zeta}{\zeta}\Lambda'\lambda + \frac{\gamma(1-\zeta)}{\zeta}\, r = 0, \qquad (5.25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-\gamma)\zeta}{2(1-\zeta)}a'\Sigma\Sigma'a + \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma'A] + \big(\gamma K\theta + (1-\gamma)\Sigma\lambda\big)'a \\
&\qquad + \beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1(1 - a_0 - \log g_1) + \frac{1-\zeta}{2\zeta}\lambda'\lambda + \frac{\gamma(1-\zeta)}{\zeta}r_0 - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0, \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

ここで，g_1 は (4.28) 式で表されている．

このとき，次の命題を得る．

命題 5.2. 仮定 *2.1*・*2.2*・*5.1* の下，本問題 *(5.4)* の近似価値関数，近似最適消費，近似最適投資は次を満たしている．

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) &= \frac{\tilde{W}_t^{*1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left[\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right], && (5.27) \\
\tilde{c}_t^* &= \beta^{\frac{1}{\zeta}}\exp\left[-\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right]\tilde{W}_t^*, && (5.28) \\
\tilde{\Psi}_t^* &= \frac{1}{\gamma}\left(\lambda + \Lambda X_t\right) + \frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)}\Sigma'\left(a + AX_t\right). && (5.29)
\end{aligned}
$$

ここで，(a_0, a, A) は代数方程式 *(5.24)-(5.26)* の解である．

留意点 5.2. 近似価値関数を構成する係数体系 (a_0, a, A) の非線形代数方程式 *(5.24)-(5.26)* には一般に解が複数存在するので，これら複数の解は本問題の最適解の候補に過ぎない．これら複数の候補解から最適解を識別するための条件は第 *5* 節で示す．

留意点 5.3. 近似最適投資が満たす *(5.29)* 式は，将来の状態変数の変化を考慮しない近視眼的動機に基づく「危険証券」（非短期債）の需要を示す第 *1* 項と，同変化に保険を掛けるための保険的動機に基づく需要を示す第 *2* 項から成っているが，第 *2* 項の係数には相対的危険回避度 γ と相対的異時点間変動回避度 ζ が明示的に現れている．両回避度が一致する *CRRA* 効用の場合，近似最適投資が満たす式は，*(5.29)* 式から

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma}\left(\lambda + \Lambda X_t\right) + \Sigma'\left(a + AX_t\right), \tag{5.30}$$

となり，保険的動機に基づく第 *2* 項の係数に両回避度は明示的に現れなくなる．但し，両回避度は (a, A) に陰伏的に含まれている．

5.3. $\zeta = 1$ の場合の解析解

本節では，Epstein-Zin 効用において，相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）が 1 の場合の解析解を導出する．

相対的異時点間変動回避度が 1 のとき，本稿における消費と投資の最適化問題と価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \mathrm{E}\left[\int_0^\infty \beta(1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)\left\{\log c_t - \frac{1}{1-\gamma}\log\bigl((1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)\bigr)\right\}dt\right]. \tag{5.31}$$

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned}\sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}\Biggl\{&\begin{pmatrix} W_t\left(r_t + \Psi_t'\Lambda_t\right) - c_t \\ K(\theta - X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W(\mathbb{X}_t^u) \\ J_X(\mathbb{X}_t^u)\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{WX}(\mathbb{X}_t^u) \\ J_{XW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{XX}(\mathbb{X}_t^u)\end{pmatrix}\right]\\ &+ \beta(1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)\left\{\log c_t - \frac{1}{1-\gamma}\log\bigl((1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)\bigr)\right\}\Biggr\} = 0,\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\text{s.t.} \quad \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}[e^{-\nu T}|J(\mathbb{X}_t^u)|] = 0,$$

ここで，ν はある正の定数である．

前節と同様に最適化を行うと，価値関数は次式で推測され，

$$V(\mathbb{X}_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}h(X_t), \tag{5.33}$$

次の命題を得る．

命題 5.3. 仮定 *2.1*・*2.2*・*5.1* の下，本問題 *(5.31)* の価値関数，最適消費，最適投資は，それぞれ *(5.33)* 式，*(5.34)* 式，*(5.35)* 式で表される．ここで，$h(X_t)$ は偏微分方程式 *(5.36)* の解である．

$$\hat{c}_t = \beta\hat{W}_t, \tag{5.34}$$

$$\hat{\Psi}_t = \frac{1}{\gamma}\Lambda_t + \frac{1}{\gamma}\Sigma'\frac{h_X}{h}, \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{h_{XX}}{h}\right] + \frac{1-\gamma}{2}\frac{h_X'}{h}\Sigma\Sigma'\frac{h_X}{h} + \bigl\{\gamma K(\theta - X_t) + (1-\gamma)\Sigma\Lambda_t\bigr\}'\frac{h_X}{h}\\ &\qquad - \beta\gamma\log h + \left\{\frac{1-\gamma}{2}\Lambda_t'\Lambda_t + \gamma(1-\gamma)\bigl(r_t + \beta(\log\beta - 1)\bigr)\right\} = 0.\end{aligned} \tag{5.36}$$

証明．HJB 方程式 (5.32) における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解 $\hat{c}$ は (5.37) 式を，$\hat{\Psi}$ は (5.38) 式をそれぞれ満たしている．

$$\hat{c}_t = \beta(1-\gamma)\frac{V}{V_W}, \tag{5.37}$$

$$\hat{\Psi}_t = \frac{\hat{\pi}_t}{\hat{W}_t^2 V_{WW}}, \tag{5.38}$$

ここで，

$$\hat{\pi}_t = -\hat{W}_t \left\{ V_W \Lambda_t + \Sigma' V_{XW} \right\}.$$

最適消費 (5.37) 式と最適投資 (5.38) 式を HJB 方程式 (5.32) に代入し，(5.38) 式から導かれる次式，

$$\hat{W}_t V_W \Lambda_t' \hat{\Psi}_t + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} \hat{W}_t \hat{\Psi}_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{W}_t \hat{\Psi}_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\hat{\pi}_t' \hat{\pi}_t}{2\hat{W}_t^2 V_{WW}},$$

に注意して整理すると，次の価値関数 V に関する偏微分方程式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\hat{\pi}_t' \hat{\pi}_t}{2\hat{W}_t^2 V_{WW}} + \hat{W}_t r_t V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X \\ - \hat{c}_t V_W + \beta(1-\gamma) V \left\{ \log \hat{c}_t - \frac{1}{1-\gamma}\log\bigl((1-\gamma)V\bigr) \right\} = 0. \end{aligned}\tag{5.39}$$

価値関数は (5.33) 式で推測されるので，最適消費は (5.37) 式から直ちに (5.34) 式を得る．

次に，価値関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$\hat{W}_t V_W = (1-\gamma)V, \qquad V_X = V\frac{h_X}{h}, \qquad \hat{W}_t^{*2} V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V,$$

$$\hat{W}_t V_{XW} = (1-\gamma)V\frac{h_X}{h}, \qquad V_{XX} = V\frac{h_{XX}}{h}.$$

価値関数の偏微分結果より，最適投資 (5.38) 式右辺の分子は (5.40) 式，分母は (5.17) 式のように表される．

$$\hat{\pi}_t = -(1-\gamma)V\left(\Lambda_t + \Sigma'\frac{h_X}{h}\right). \tag{5.40}$$

ゆえに，最適投資 (5.38) 式に (5.40)(5.17) 式を代入すると，(5.35) 式を得る．

価値関数 V の偏微分方程式 (5.39) における第 2 項までは，(5.40)(5.17) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\hat{\pi}_t' \hat{\pi}_t}{2W_t^2 V_{WW}} &= \frac{1}{2}V\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{h_{XX}}{h}\right] + \frac{1-\gamma}{2\gamma}V\left(\Lambda_t + \Sigma'\frac{h_X}{h}\right)'\left(\Lambda_t + \Sigma'\frac{h_X}{h}\right) \\ &= V\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{h_{XX}}{h}\right] + \frac{1-\gamma}{2\gamma}\Lambda_t'\Lambda_t + \frac{1-\gamma}{\gamma}\Lambda_t'\Sigma'\frac{h_X}{h} + \frac{1-\gamma}{2\gamma}\frac{h_X'}{h}\Sigma\Sigma'\frac{h_X}{h}\right\}. \end{aligned}\tag{5.41}$$

価値関数の偏微分方程式 (5.39) における第 5・6 項は，

$$\begin{aligned}& - \hat{c}_t V_W + \beta(1-\gamma)V\left\{\log \hat{c}_t - \frac{1}{1-\gamma}\log\bigl((1-\gamma)V\bigr)\right\} \\ &\quad = \beta(1-\gamma)V\left\{-1 + \log\beta + \log\hat{W}_t - \log\hat{W}_t - \frac{1}{1-\gamma}\log h\right\} \\ &\quad = \beta V\bigl\{(\log\beta - 1)(1-\gamma) - \log h\bigr\}. \end{aligned}\tag{5.42}$$

(5.41)(5.42) 式等を価値関数の偏微分方程式 (5.39) に代入し，両辺を V/γ で除して整理すると，(5.36) 式が得られる． □

価値関数を構成する未知関数 h の偏微分方程式 (5.36) は，非斉次項が対数関数で表されており，次の関数形の解析解が導出される．

$$h(X_t) = \exp\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right), \tag{5.43}$$

ここで，A は一般性を失うことなく対称行列である．

次の命題を得る．

命題 5.4. 仮定 *2.1*・*2.2*・*5.1* の下，本問題 *(5.31)* の価値関数，最適投資は次を満たしている．

$$V(\hat{\mathbb{X}}_t) = \frac{\hat{W}_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left[a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right], \tag{5.44}$$

$$\hat{\Psi}_t = \frac{1}{\gamma}(\lambda + \Lambda X_t) + \frac{1}{\gamma}\Sigma'(a + AX_t), \tag{5.45}$$

ここで，(a_0, a, A) は代数方程式 *(5.46)*-*(5.48)* の解である．

$$\frac{1}{2}A\Sigma\Sigma'A - \left(\gamma K' - (1-\gamma)\Lambda'\Sigma' + \frac{\beta\gamma}{2}\right)A + \frac{1-\gamma}{2}\Lambda'\Lambda = 0, \tag{5.46}$$

$$A\Sigma\Sigma'a + \gamma\big(AK\theta - K'a\big) + (1-\gamma)(A\Sigma\lambda + \Lambda'\Sigma'a) - \beta\gamma\, a + (1-\gamma)\Lambda'\lambda + \gamma(1-\gamma)\, r = 0, \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a'\Sigma\Sigma'a + \frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}[\Sigma\Sigma'A] + \big(\gamma K\theta + (1-\gamma)\Sigma\lambda\big)'a \\ &\qquad - \beta\gamma\, a_0 + \frac{1-\gamma}{2}\lambda'\lambda + \gamma(1-\gamma)\, r_0 - \beta(1-\log\beta)\gamma(1-\gamma) = 0.\end{aligned} \tag{5.48}$$

証明. 関数 (5.43) に偏微分を施し，偏微分方程式 (5.36) に代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'(aa' + A + aX_t'A + AX_ta' + AX_tX_t'A)\right] + \frac{1-\gamma}{2}(a' + X_t'A)\Sigma'\Sigma(a + AX_t) \\ &\quad + \big\{\gamma K\theta + (1-\gamma)\Sigma\lambda - \big(\gamma K - (1-\gamma)\Sigma\Lambda\big)X_t\big\}'(a + AX_t) \\ &\quad - \beta\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right) + \frac{1-\gamma}{2}(\lambda'\lambda + 2\lambda'\Lambda X_t + X_t'\Lambda'\Lambda X_t) \\ &\quad + \gamma(1-\gamma)(r_0 + r'X_t) - \beta(1-\log\beta)\gamma(1-\gamma) = 0.\end{aligned} \tag{5.49}$$

上式は X_t に関する恒等式なので，(a_0, a, A) の代数方程式 (5.46)-(5.48) が導出される． □

5.4. 最適解の十分条件

一般の Epstein-Zin 効用汎関数の場合の最適化問題において導かれた近似価値関数を構成する係数体系 (a_0, a, A) は代数方程式 (5.24)-(5.26) の解であるが，同解は一般に非最適解を含めて複数存在する．本節では，Agram and Øksendal [1] が 1 次元ブラウン運動に基づく確率過程の前進・後退確率微分方程式の無限時間最適制御で展開した理論を多次元ブラウン運動に基づく確率過程の場合に応用して最適解の十分条件を提示する．

5.4.1.　前進・後退確率微分方程式の最適制御による本問題の再定式化

本問題を Agram and Øksendal [1] において考察されている前進・後退確率微分方程式の無限時間最適制御問題の枠組みで再定式化するため，まず，次の前進・後退確率微分方程式を考察する．

可測過程 $\mathbb{X}_t^u = (W_t^u, X_t')'$ の前進確率微分方程式：

$$d\mathbb{X}_t^u = \mu(\mathbb{X}_t^u, u_t)\,dt + \sigma(\mathbb{X}_t^u, u_t)\,dB_t, \qquad \mathbb{X}_0^u = \mathbb{X}_0, \tag{5.50}$$

ここで，

$$\mu(\mathbb{X}_t^u, u_t) = \begin{pmatrix} W_t^u\,(r_t + \Psi_t'\Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t^u\,\{r_0 + \Psi_t'\lambda + (r' + \Psi_t'\Lambda)X_t\} - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}, \tag{5.51}$$

$$\sigma(\mathbb{X}_t^u, u_t) = \begin{pmatrix} W_t^u \Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{X}_0 = (W_0, X_0')'. \tag{5.52}$$

可測過程 (z_t^u, Z_t^u) の後退確率微分方程式：

$$-dz_t^u = f(c_t, z_t^u)dt - Z_t^u dB_t, \qquad \mathrm{E}\left[\sup_{t\geq 0} e^{kt}(z_t^u)^2 + \int_0^\infty e^{kt}(Z_t^u)^2 dt\right] < \infty, \tag{5.53}$$

ここで，f は (5.2) 式で表されており，k はある正の定数である．

(5.53) 式より，z_t^u は次式で表現される．

$$z_t^u = \mathrm{E}_t\left[\int_t^T f(c_s, z_s^u)ds + z_T^u\right]. \tag{5.54}$$

このとき，本最適化問題 (5.4) は次のように表現される．

$$z_0^* = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \mathrm{E}\left[\int_0^\infty f(c_t, z_t^u)dt\right]. \tag{5.55}$$

Hamiltonian を定義するための随伴過程 (p_t, q_t, R_t) を次のように表記する．

$$q_t = \begin{pmatrix} q_t^W \\ q_t^X \end{pmatrix}, \qquad R_t = \begin{pmatrix} R_t^W \\ R_t^X \end{pmatrix},$$

ここで，p_t，q_t^W はスカラー，q_t^X は $N \times 1$ ベクトル，R_t^W は $1 \times N$ ベクトル，R_t^X は $N \times N$ 行列である．

このとき，Hamiltonian H は次式で定義される．

$$\begin{aligned} H(\mathbb{X}, z, Z, u, p, q, R) &= f(c, z)p + \mu(\mathbb{X}, u)'q + \mathrm{tr}[\sigma(\mathbb{X}, u)'R] \\ &= \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} z \left\{ \left(\frac{c}{((1-\gamma)z)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\zeta} - 1 \right\} p + \{W\{r_0 + \Psi'\lambda + (r' + \Psi'\Lambda)X\} - c\} q^W \\ &\quad + (K\theta - KX)'q^X + \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W\Psi' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} R^W \\ R^X \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \tag{5.56}$$

5.4.2.　制御過程及び随伴過程の最適解

問題 (5.55) は次の随伴過程の前進・後退確率微分方程式に関連付けられる．

随伴前進確率微分方程式：

$$dp_t = H_z(\mathbb{X}_t^u, z_t^u, Z_t^u, u_t, p_t, q_t, R_t)dt + H_Z(\mathbb{X}_t^u, z_t^u, Z_t^u, u_t, p_t, q_t, R_t)dB_t, \qquad p_0 = 1. \quad (5.57)$$

随伴後退確率微分方程式：

$$-dq_t = H_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}_t^u, z_t^u, Z_t^u, u_t, p_t, q_t, R_t)dt - R_t dB_t, \qquad \mathrm{E}\left[\sup_{t\geq 0} e^{kt} q_t^2 + \int_0^\infty e^{kt}(R_t)^2 dt\right] < \infty, \quad (5.58)$$

ここで，k はある正の定数である．

上記随伴前進・後退確率微分方程式に Hamiltonian (5.56) 式を代入して計算すると，次の前進・後退確率微分方程式（初期条件と横断条件は省略）を得る．

$$dp_t = f_z(c_t, z_t^u)p_t dt, \quad (5.59)$$

$$-dq_t = \left(\mu_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}_t^u, u_t)q_t + \sum_{n=1}^N \sigma_{\mathbb{X}}^n(\mathbb{X}_t^u, u_t)R_t^n\right)dt - R_t dB_t, \quad (5.60)$$

ここで，σ^n，R_t^n は各行列の第 n 列を示しており，従って，$\sigma_{\mathbb{X}}^n$ は $N\times(N+1)$ 行列である．

次の補題を得る．

補題 5.1. 仮定 *2.1*・*2.2*・*5.1* の下，制御過程 $u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$ が *HJB* 方程式 *(5.5)* の解であり，対応する前進・後退確率微分方程式 *(5.50)(5.53)* 及び随伴前進・後退確率微分方程式 *(5.57)(5.58)* が一意の解 $(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$ を持つと仮定する．このとき，$(z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$ は次で表される．

$$z_t^* = V(\mathbb{X}_t^*), \quad (5.61)$$

$$Z_t^* = \begin{pmatrix} V_W(\mathbb{X}_t^*) \\ V_X(\mathbb{X}_t^*) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix}, \quad (5.62)$$

$$p_t^* = \exp\left(\int_0^t \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta}\left\{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}\left(\frac{c_s^*}{((1-\gamma)z_s^*)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)^{1-\zeta} - 1\right\}ds\right), \quad (5.63)$$

$$q_t^* = p_t^* \begin{pmatrix} V_W(\mathbb{X}_t^*) \\ V_X(\mathbb{X}_t^*) \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

$$R_t^* = p_t^* \begin{pmatrix} V_{WW}(\mathbb{X}_t^*) & V_{WX}(\mathbb{X}_t^*) \\ V_{XW}(\mathbb{X}_t^*) & V_{XX}(\mathbb{X}_t^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

また，次の条件付き最大値原理が成立する．

$$\mathrm{E}_t[H(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)] \geq \mathrm{E}_t[H(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, u_t, p_t^*, q_t^*, R_t^*)]. \quad (5.66)$$

証明．前進・後退確率微分方程式 (5.50)(5.53) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.57)(5.58) が一意の解を持つと仮定されているので，(5.61)-(5.65) 式で表される $(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$ が前進・後退確率微分方程式 (5.50)(5.53) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.57)(5.58) を

満たしていることを示せば良い．まず，(z_t^*, Z_t^*) が (5.53) 式を満たしていること，p_t^* が (5.57) 式を満たしていることは直ちに確認できる．(q_t^*, R_t^*) については，$u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$ が代入されたHJB 方程式 (5.5) の $J_{\mathbb{X}}$ に (5.64) 式を代入すると，次式が成立している（時間変数は省略，以下同様）．

$$\mu' q^* + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma\sigma' q_{\mathbb{X}}\right] + \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} z^* \left\{ \left(\frac{c^*}{\left((1-\gamma)z^*\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\zeta} - 1 \right\} = 0. \tag{5.67}$$

上式を状態変数の第 i 成分 $\mathbb{X}_i$ で偏微分し，整理すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} &\mu' q^*_{\mathbb{X}_i} + \mu'_{\mathbb{X}_i} q^* + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma\sigma' q^*_{\mathbb{X}\mathbb{X}_i}\right] + \mathrm{tr}\left[q^*_{\mathbb{X}}\sigma\sigma'_{\mathbb{X}_i}\right] \\ &\qquad + c^*_{\mathbb{X}_i}\left\{\mu'_{c^*} q^* + \beta(c^*)^{-\zeta}\big((1-\gamma)z\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}}\right\} + \Psi^*_{\mathbb{X}_i}\left\{\mu'_{\Psi^*} q^* + \mathrm{tr}\left[q^*_{\mathbb{X}}\sigma\sigma'_{\Psi^*}\right]\right\} = 0. \end{aligned} \tag{5.68}$$

上式における第 5・6 項については，$u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$ が最適制御であることに留意すると，

$$\mu'_{c^*} q^* + \beta(c^*)^{-\zeta}\big((1-\gamma)z^*\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} = 0, \qquad \mu'_{\Psi^*} q^* + \mathrm{tr}\left[q^*_{\mathbb{X}}\sigma\sigma'_{\Psi^*}\right] = 0.$$

従って，次式を得る．

$$\mu' q^*_{\mathbb{X}_i} + \mu'_{\mathbb{X}_i} q^* + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma\sigma' q^*_{\mathbb{X}\mathbb{X}_i}\right] + \mathrm{tr}\left[q^*_{\mathbb{X}}\sigma\sigma'_{\mathbb{X}_i}\right] = 0. \tag{5.69}$$

他方，q_i^* を微分すると，伊藤の補題により，次式を得る．

$$-dq_i^* = -\left(\mu' q^*_{i\mathbb{X}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma\sigma' q^*_{i\mathbb{X}\mathbb{X}}\right]\right) dt - (q^*_{i\mathbb{X}})'\sigma dB_t. \tag{5.70}$$

上式を (5.69) 式と $R_i^* = (q^*_{i\mathbb{X}})'\sigma$ を用いて変形すると，(q_t^*, R_t^*) が随伴後退確率微分方程式(5.58) を満たしていることが確認できる．

条件付き最大値原理については，HJB 方程式左辺の Ψ_t に関する最適化の結果，(5.66) 式右辺 $\mathrm{E}_t[H(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, c_t, \Psi_t, p_t^*, q_t^*, R_t^*)]$ の Ψ_t の現れる項が消滅する．従って，(5.66) 式右辺が c_t^* で最大化されることを示せば良いが，このことは既に HJB 方程式左辺の最大化で確認した通りである． □

5.4.3. 十分条件

Agram and Øksendal [1] の定理 3.1 は，$u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$ が最適解であるための十分条件は，前進・後退確率微分方程式 (5.50)(5.53) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.57)(5.58) の解の一意的存在を保証する正則条件（横断条件及び成長条件）[9] 及び条件付き最大値原理の成立の下，関数 $(\mathbb{X}, z, Z, u) \to H(\mathbb{X}, z, Z, u, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$ が凹関数であることを示している．従って，補題 5.1 より，$u^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$ が最適解であるための十分条件は，次の Hessian $\mathbf{H}$ が負定符号であることに帰着される．

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & H_{WX} & 0 & 0 & 0 & H_{W\Psi} \\ H_{XW} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{X\Psi} \\ 0 & 0 & H_{zz} & 0 & H_{zc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{cz} & 0 & H_{cc} & 0 \\ H_{\Psi W} & H_{\Psi X} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.71}$$

[9] 本モデルにおける状態変数等は，このままでは正則条件を満たしていないので，正則条件を満たすように，ドリフト及び拡散係数は十分大きな定数以下であると仮定する．

ここで，

$$
\begin{aligned}
H_{XW} &= p_t^* V_W(\mathbb{X}_t^*)(r+\Lambda'\varPsi),\\
H_{zz} &= \beta(\gamma-\zeta)c^{1-\zeta}\big((1-\gamma)z\big)^{\frac{\gamma+\zeta-2}{1-\gamma}}p_t^*,\\
H_{cz} &= \beta(\gamma-\zeta)c^{-\zeta}\big((1-\gamma)z\big)^{-\frac{1-\zeta}{1-\gamma}}p_t^*,\\
H_{cc} &= -\beta\,\zeta\,c^{-\zeta-1}\big((1-\gamma)z\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}}p_t^*,\\
H_{\varPsi W} &= p_t^*\big\{V_W(\mathbb{X}_t^*)(\lambda+\Lambda X)+W_t^* V_{WW}(\mathbb{X}_t^*)\varPsi_t^*+\Sigma' V_{XW}(\mathbb{X}_t^*)\big\},\\
H_{\varPsi X} &= W p_t^* V_W(\mathbb{X}_t^*)\Lambda.
\end{aligned}
$$

上式群における価値関数 V の偏微分を数値計算できる場合は，最適解の十分条件は上記 Hessian $\mathbf{H}$ が負定符号となることである．しかし，第 4 章で議論したように，偏微分方程式 (5.15) は，3 変数以上の高次元の場合，有限差分法等の数値解法を適用することは難しい．そこで，Hessian $\mathbf{H}$ に現れる $W_t^*, z_t^*, c_t^*, \varPsi_t^*, V(\mathbb{X}_t^*)$ をそれぞれ近似式 $\tilde{W}_t^*, \tilde{z}_t^*, \tilde{c}_t^*, \tilde{\varPsi}_t^*, \tilde{V}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)$ に置き換えると，本問題の近似価値関数の最適性を検証するための近似 Hessian $\tilde{\mathbf{H}}$ は次のように表される．

$$
\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix}
0 & \tilde{H}_{WX} & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{W\varPsi}\\
\tilde{H}_{XW} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{X\varPsi}\\
0 & 0 & \tilde{H}_{zz} & 0 & \tilde{H}_{zc} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \tilde{H}_{cz} & 0 & \tilde{H}_{cc} & 0\\
\tilde{H}_{\varPsi W} & \tilde{H}_{\varPsi X} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \tag{5.72}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_{XW} &= \tilde{p}_t^* \tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)(r+\Lambda'\varPsi),\\
\tilde{H}_{zz} &= \beta(\gamma-\zeta)c^{1-\zeta}\big((1-\gamma)z\big)^{\frac{\gamma+\zeta-2}{1-\gamma}}\tilde{p}_t^*,\\
\tilde{H}_{cz} &= \beta c^{-\zeta}\big((1-\gamma)z\big)^{-\frac{1-\zeta}{1-\gamma}}\tilde{p}_t^*,\\
\tilde{H}_{cc} &= -\beta\,\zeta\,c^{-\zeta-1}\big((1-\gamma)z\big)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}}\tilde{p}_t^*,\\
\tilde{H}_{\varPsi W} &= \tilde{p}_t^*\left\{\tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)+\tilde{W}_t^*\tilde{V}_{WW}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)\tilde{\varPsi}_t^*+\Sigma'\tilde{V}_{XW}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)\right\},\\
\tilde{H}_{\varPsi X} &= W\tilde{p}_t^*\tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)\Lambda,
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t) &= \tilde{W}_t^{*-\gamma}\exp\left[\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right],\\
\tilde{V}_{WW}(\tilde{\mathbb{X}}_t) &= -\gamma\tilde{W}_t^{*-\gamma-1}\exp\left[\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right],\\
\tilde{V}_{XW}(\tilde{\mathbb{X}}_t) &= \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}\tilde{W}_t^{*-\gamma}\exp\left[\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right](a+AX_t).
\end{aligned}
$$

従って，状態変数・制御変数空間の実用上適切な領域において偏微分方程式の対数線形近似の精度が十分に高く，それゆえ，近似価値関数 (6.29) 式の近似精度が十分に高いのであ

れば，代数方程式 (5.24)-(5.26) の複数候補解から最適解を識別するための条件として，近似 Hessian $\tilde{\mathbf{H}}$ が負定符号であることを利用できる．

上記条件を満たす候補解が複数存在した場合は，有り得べき幾つかの $\mathbb{X}_0$ に対し，$\tilde{V}(\mathbb{X}_0)$ を比較して最適解を見極めざるを得ない．

5.5.　近似最適投資比率の近似精度の簡便評価

本節では，対数線形近似法により導いた近似解析解に基づく近似最適消費・富比率と近似最適投資比率の近似精度を簡便に評価する．

5.5.1.　近似精度の本格的評価の困難

対数線形近似法により導いた近似解析解に基づく近似最適投資比率を厳密解に基づく最適投資比率と比較するためには，証券市場モデルのパラメータを推定した後，価値関数のパラメータの代数方程式を数値的に解いて近似最適投資比率を算出するほか，非斉次偏微分方程式を数値的に解いて厳密解に基づく最適投資比率を計算する必要がある[10]．本稿で仮定された一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルの特定において，対象証券を株式指数，REIT 指数，短期物価連動債，長期物価連動債に限定した最小限の 3 ファクター・モデルの推定でさえも，Kalman フィルター推定やベイジアン推定といった計算負担の重い方法で推定しなければならない．また，厳密解に基づく最適投資比率を求めるためには，3 変数関数の非線形・非斉次偏微分方程式 (5.15) を数値的に解く必要がある．以上の点を考慮して，本稿では近似最適投資比率の近似精度の本格的評価は断念せざるを得なかった．同評価は独立した論文の課題として検証される価値があり，今後の研究課題としたい．

5.5.2.　証券市場モデルの特定と推定結果

本格的アフィン潜在ファクター証券市場モデルを推定することは困難なので，$N = 1$，$r_t = X_t$ と特定する．また，消費者は短期債と時価総額加重型株式指数のみに投資すると仮定する．すなわち，次の証券市場モデルを仮定する．

$$dr_t = K(\theta - r_t)\,dt + \Sigma\,dB_t, \tag{5.73}$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t + b\,\Sigma\Lambda_t)\;dt + b\,\Sigma\,dB_t, \tag{5.74}$$

ここで，$b > 0$，

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda\,r_t. \tag{5.75}$$

留意点 5.4. 上記証券市場モデルにおいては，$b > 0$ と仮定されているほか，後述する実証により，$\Lambda < 0$ と推定されている．従って，株式指数と短期金利が完全正相関となっているほか，株式指数とリスクの市場価格が完全負相関となっている．これらは明らかに現実の証券市場を過度に単純化しているが，*1* ファクター・モデルを簡便評価の対象とする以上，やむを得ないものである．因みに，株式指数と短期金利の完全正相関は，一般に，金利と完全負相関の関係にある債券価格と株価が負相関であることを踏まえて設定した仮定である．株式指数とリスクの市場価格の完全負相関は，*Wachter [35]* も同様の *1* ファクター証券市場モデル（但し，短期金利一定）において，*Barberis [5]* の研究を踏まえて仮定している．

米国の 1990 年 10 月末〜2018 年 10 月末の日次終値を対象に推定を行った．短期金利は財務省短期証券 3 カ月物，時価総額加重型株式指数は S&P500 指数を用い，実質化は 1991 年〜2018 年の消費者物価指数のインフレ率で行った．

[10] 尚，第 3 節で示された相対的異時点間変動回避度 $\zeta = 1$ の厳密解が得られる場合は，最適投資比率と近似最適投資比率が一致するので，近似最適投資比率の近似精度の分析には利用できないことに留意されたい．

推定については，(5.73) 式と (5.74) 式を Euler 離散化し，線形回帰モデルと見做し，各線形回帰モデルを OLS で推定する簡便推定を行った．推定結果は表 1 の通りである．

表 1: 証券市場モデルの係数体系の推定結果

係数	K	θ	Σ	λ	Λ	b
推定値	0.140753	-0.00988256	0.00736040	0.506620	-2.00042	23.8609

このとき，リスクの市場価格は，

$$\Lambda_t = 0.506620 - 2.00042\, r_t,$$

と実質短期金利の減少関数となっている．本モデルでは，株式指数の Sharpe 測度はリスクの市場価格なので，これは，株式指数の Sharpe 測度が金利水準が高くなるにつれて小さくなることを示している．

また，株式指数の期待収益率は，

$$r_t + b\,\Sigma\Lambda_t = 0.0889755 + 0.648675\, r_t,$$

と実質短期金利の増加関数となっている．従って，ポートフォリオの期待収益率も実質短期金利の増加関数となるので，実質短期金利の上昇は所得増大効果を有する．

5.5.3. 近似解析解と厳密解の数値解の算出

Epstein-Zin 効用の係数体系については，Bansal and Yaron [4] が，Epstein-Zin 効用を有する代表的個人の下で導出される C-CAPM の実証分析において，次のように設定している．すなわち，主観的割引率を $\beta = 0.002$ に，相対的危険回避度を，Mehra and Prescott [33] が合理的な上限は 10 近辺と議論していることを踏まえて，低水準の場合 $\gamma = 7.5$，高水準の場合 $\gamma = 10.0$ に設定している．また，相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）については，Hansen and Singleton [20] 等が 1 より低いと推定していることに基づき，$\zeta = 0.67$ に設定している．そこで本稿でも，当面は，主観的割引率を $\beta = 0.002$ に，相対的危険回避度を，低水準の場合 $\gamma = 7.5$，高水準の場合 $\gamma = 10.0$ に，相対的異時点間変動回避度を $\zeta = 0.67$ に設定する．

状態変数である実質短期金利 r_t については，推定対象期間中，概ね -4.0%〜3.0%で推移していることから，初期値 r_0 を中心値 -0.5%に設定し，-4.0%〜3.0%の範囲を対象に近似解と厳密解を求めた．

まず，近似解析解については，関数 G の係数 (a_0, a, A) を代数方程式 (5.24)-(5.26) に代入して数値的に解いた．数値解法の手順は以下の通りである．予め，(4.28) 式の g_1 が取り得る範囲を $0 < g_{\min} \le g_1 \le g_{\max}$ と定めておく．ここで，$g_{\min}$ は十分に小さく，$g_{\max}$ は十分に大きな値に設定しておく．まず，十分大きな自然数 n について $\Delta_n = (g_{\max} - g_{\min})/n$ と置き，$j = 1, \cdots, n+1$ に対して $g_{1,j} = g_{\min} + \Delta_n(j-1)$ とする．$g_1 = g_{1,j}$ を (5.24) 式に代入すると，解 A は最大で 2 個存在する．2 個存在する場合，それぞれの解を A_j^m $(m = 1, 2)$ と記す．次に，$(g_1, A) = (g_{1,j}, A_j^m)$ を (5.25) 式に代入し，a について解くと，解 a_j^m が得られる．さらに，(4.28) 式と $(g_1, A, a) = (g_{1,j}, A_j^m, a_j^m)$ から $a_{0,j}^m$ を計算し，$(g_1, A, a, a_0) = (g_{1,j}, A_j^m, a_j^m, a_{0,j}^m)$ を (5.26) 式の左辺に代入し，得られる値が 0 と等しくなるか判定する．0 と等しくなった場合，$(A, a, a_0) = (A_j^m, a_j^m, a_{0,j}^m)$ が代数方程式 (5.24)-(5.26) の解の一つである．(5.24) 式に $g_1 = g_{1,j}$

を代入したときの A の解が 1 個存在する場合でも計算過程は上と同様である．全ての j に対して，上で示した計算過程を取ることにより, 複数の解の組が得られる可能性がある．

以上の数値解法を適用した結果，解は 1 組しか存在しなかったので，これを価値関数の近似解と見做した [11]．同近似解における G の係数体系は表 2 の通りである．

表 2: 価値関数の近似解における G の係数体系

γ	a_0	a	A
7.5	-4.58148	3.06441	0.989791
10.0	-4.85518	3.13700	0.736863

次に，厳密解については，

$$G_{XX} = Y_X = \Xi(G, Y),$$

と変形した上で，次の連立常微分方程式を 4 次の Runge-Kutta 法により数値的に解いた．

$$\begin{pmatrix} G_X \\ Y_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ \Xi(G, Y) \end{pmatrix}. \tag{5.76}$$

尚，本無限時間問題の最適化の結果導出された偏微分方程式 (5.15) は，有限時間問題の場合には課される境界条件が与えられていない．そこで，上記連立常微分方程式を数値的に解く際，初期値として $G(r_0), Y(r_0) = G_X(r_0)$ の値が必要となるので，近似偏微分方程式 (5.21) の解形式である (4.26) 式から計算される次の値，

$$G(r_0) = \exp\left(a_0 + a\, r_0 + \frac{1}{2} A\, r_0^2\right), \tag{5.77}$$

$$Y(r_0) = \big(a + A\, r_0\big)\, G(r_0), \tag{5.78}$$

を用いることにした．

5.5.4.　現実の投資比率と整合的な Epstein-Zin 効用の係数体系

まず，厳密解に基づく株式指数の最適投資比率は図 1，図 2 の通りである．

低中金利水準（-4%〜2%程度）では，金利上昇に伴う Sharpe 測度の低下につれて，近視眼的需要項が正値で緩やかに減少していることから，投資比率は緩やかに右肩下がりである．しかし，高金利水準では，金利上昇につれて，近視眼的需要項が引続き緩やかに減少しているのに対し，保険需要項が急増していることから，投資比率は急激な右肩上がりになっている．

投資比率の保険需要項に現れる影響は複雑であり，今後の比較静学分析・実証分析が待たれるが，高金利水準において，Sharpe 測度の低下に伴う近視眼的需要項の減少の効果を保険需要項の変化の効果が大きく上回り，その結果，投資比率が急激な右肩上がりになっていることは，経済学的に解釈し難い．また，緩やかな右肩下がりとなっている低中金利水準においても，投資比率の水準が，現実に観察される投資水準に比べ低水準に止まっている．

そこで，適切な投資比率の水準と高金利水準での挙動を同時に表現できる Epstein-Zin 効用の係数体系を模索した．$(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$ の場合，上記数値計算における代数方程式 (5.24)-(5.26) の解は 1 組となり，同解をもとに厳密投資比率を計算すると，その水準は尤もらしく，高金利水準での右肩上がりも合理的な範囲内に収まる結果を得た（図 3 参照）．

[11] 同解が 2 組以上存在する場合は，第 4 節で示した十分条件で近似解を判定することになる．

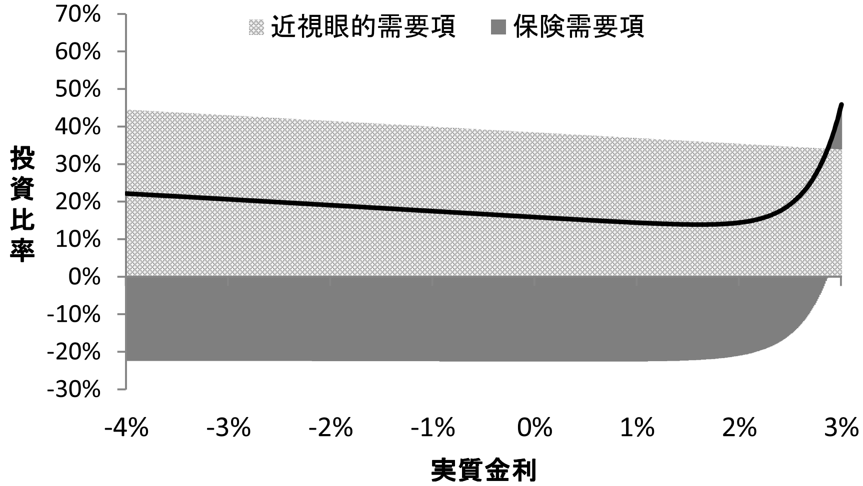

図 1: $(\gamma, \zeta) = (7.5, 0.67)$ の場合の厳密解に基づく株式指数の最適投資比率

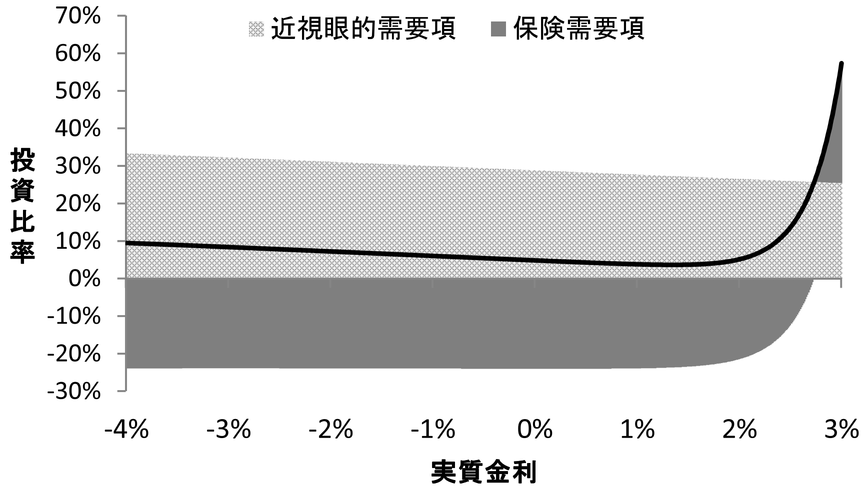

図 2: $(\gamma, \zeta) = (10.0, 0.67)$ の場合の厳密解に基づく株式指数の最適投資比率

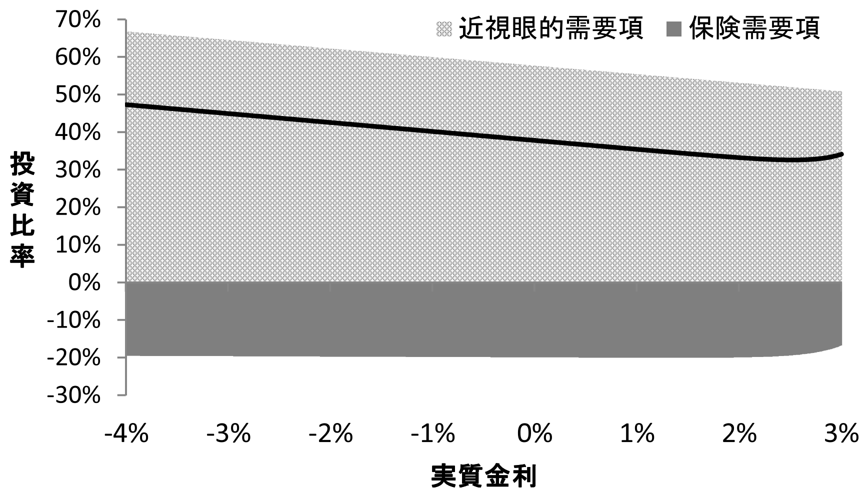

図 3: $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$ の場合の厳密解に基づく株式指数の最適投資比率

5.5.5.　近似消費・富比率と近似投資比率の近似精度

近似最適消費･富比率と近似最適投資比率の近似精度を現実の投資比率と整合的な Epstein-Zin 効用である $(\gamma,\zeta)=(5.0,0.80)$ の場合と，相対的異時点間変動回避度が 1 を上回る $(\gamma,\zeta)=(5.0,1.25)$ の場合で分析する．

尚，最適消費・富比率は，(5.13) 式より，

$$\frac{c_t^*}{W_t^*}=\frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}}}{G}, \tag{5.79}$$

であり，G の減少関数となっていること，最適投資 Ψ_t^* は，(5.14) 式より，

$$\Psi_t^*=\frac{1}{\gamma}\Lambda_t+\frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)}\Sigma\frac{d}{dr}\log G, \tag{5.80}$$

と表されることに留意せよ．また，以下では，G の近似関数を $\tilde{G}$ と表記する．

まず，$(\gamma,\zeta)=(5.0,0.80)$ の場合を分析する．上記数値解法を適用した結果，代数方程式 (5.24)-(5.26) の解は 1 組であったので，同解に基づいて，近似解と厳密解を得た．同近似解と同厳密解を最適消費・富比率で比較した（図 4 参照）．

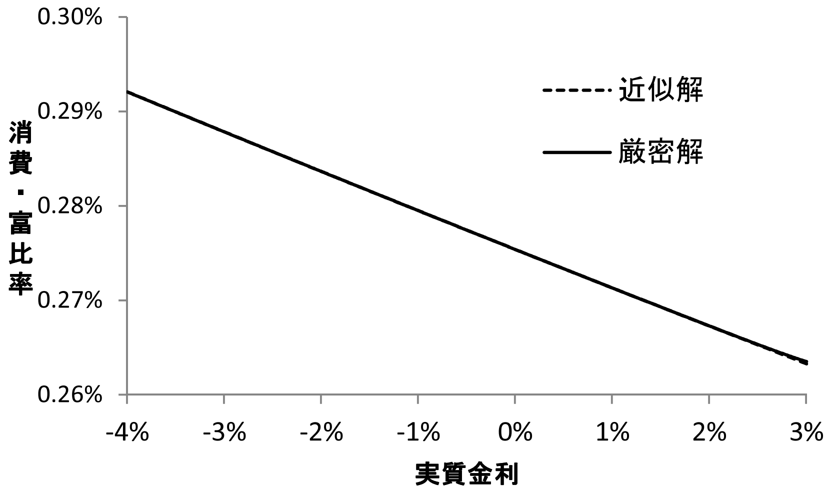

図 4: $(\gamma,\zeta)=(5.0,0.80)$ の場合の近似最適消費・富比率の近似精度

厳密解に基づく最適消費・富比率は，直観的に妥当な水準である．また，同比率は実質金利の上昇に伴い低下している．これについては，本モデルでは実質金利の上昇がポートフォリオの期待収益率を向上させる所得増大効果を有しているが，相対的異時点間変動回避度が 1 より小さいため，代替効果が所得効果を上回る結果である，と解釈できる．尚，最適消費・富比率は G の減少関数であったので，最適消費・富比率が実質金利の減少関数であることは，$G_r>0$ を意味していることに留意せよ．

そして，近似解と厳密解を比較すると，殆ど一致しており，近似精度は非常に高い．これは G の近似精度が非常に高いことを示している．ただ，実質金利が高金利水準（約 2%）に達すると，近似消費・富比率は厳密消費・富比率に対し僅かに下方に乖離している（図 5 参照）．これは G の近似関数の導関数 $\tilde{G}_r$ が高金利水準では厳密値 G_r に対し上方に乖離していること（$\tilde{G}_r>G_r>0$）を示している．

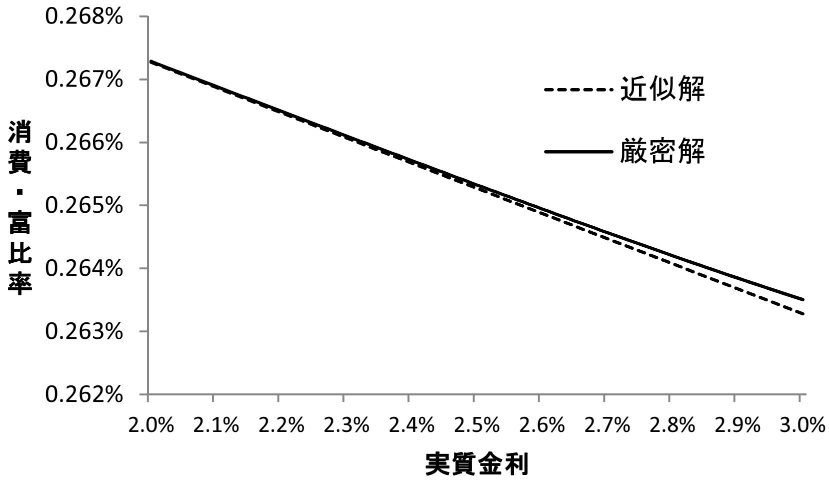

図 5: $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$ の場合の高金利水準における近似最適消費・富比率の近似精度

次に，近似解と厳密解を株式指数の最適投資比率で比較した（図 6 参照）.

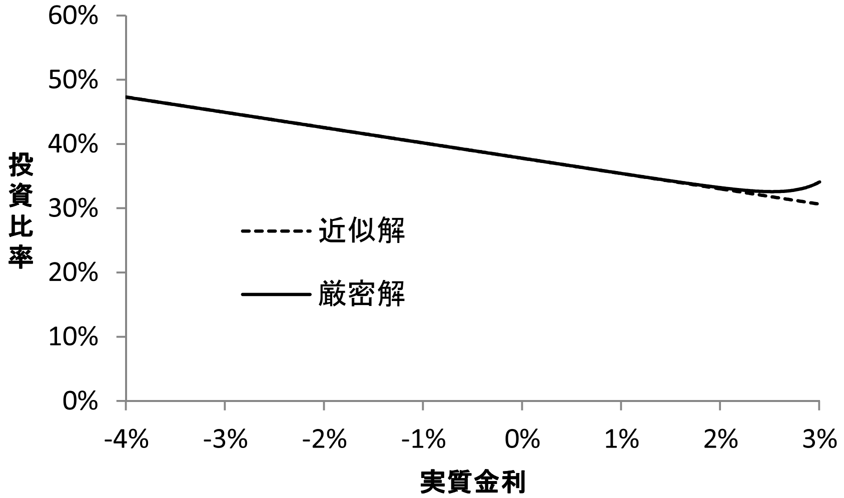

図 6: $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$ の場合の近似最適投資比率の近似精度

実質金利が高金利水準（約 2%）に達するまでは，近似投資比率は厳密投資比率と殆ど一致しているが，同水準を超えると，厳密投資比率に対する下方乖離が生じている．$(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$ の場合，(5.80) 式において，

$$\frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)}\Sigma < 0,$$

であることを考慮すると，高金利水準における近似値 $\tilde{G}_r$ の厳密値 G_r に対する上方乖離（$\tilde{G}_r > G_r > 0$）が近似投資比率の厳密投資比率に対する下方乖離をもたらしているのである．ただ，同乖離は限定的であり，近似精度は総じて非常に高いと評価できる．また，かかる乖離が安定的なものであれば，同乖離を補正する運用により対処できる．

現実の投資比率と整合的な例として取り上げた $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$ の場合の近似解の近似精度については，消費・富比率は非常に高く，投資比率も総じて非常に高かった．上記効用は，異時点間代替弾力性（相対的異時点間変動回避度の逆数）が 1 を上回り，代替効果が所得効果を上回る場合であるが，最後に，異時点間代替弾力性が 1 を下回り，代替効果が所得

効果を下回る場合にも，近似解の精度が維持されるか否かを $(\gamma,\zeta)=(5.0,1.25)$ の場合で検証する．

まず，上記数値解法を適用した結果，代数方程式 (5.24)-(5.26) の解は 1 組であったので，同解に基づいて，近似解と厳密解を得た．同近似解と同厳密解を最適消費・富比率で比較した（図 7 参照）．厳密解に基づく最適消費・富比率は，$\zeta=0.80$ の場合に比べ 50%程度の水

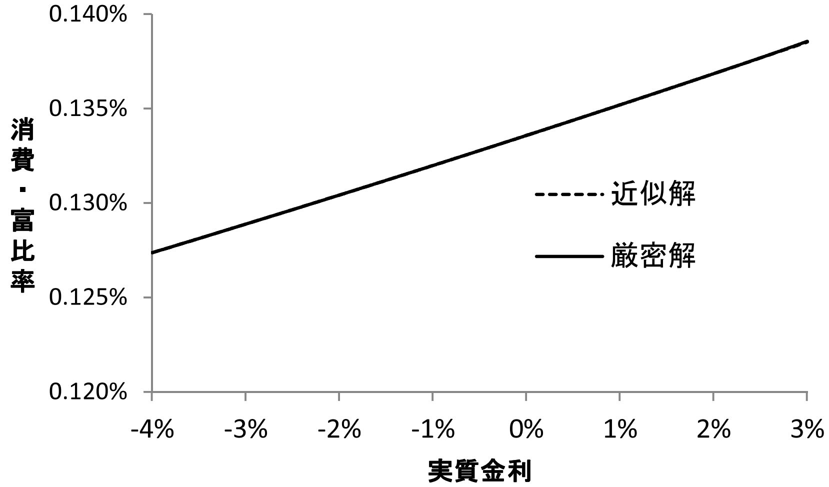

図 7: $(\gamma,\zeta)=(5.0,1.25)$ の場合の近似最適消費・富比率の近似精度

準に低下している．これは，相対的異時点間変動回避度が高いため，実質金利の変動に伴う富収益率の変動を消費変動に影響させないように，富収益率の水準を高めようとする動機に基づいていると解釈できる．実際，実質金利の変動（-4.0%〜3.0%）に対する消費・富比率の変動幅は，$\zeta=0.80$ の場合は約 0.03%であったのに対し，$\zeta=1.25$ の場合は約 0.01%に止まっている．

また，$\zeta=0.80$ の場合とは逆に，実質金利の上昇に伴い消費・富比率は上昇しているが，これは，相対的異時点間変動回避度が 1 より大きく，所得効果が代替効果を上回っていることに起因していると解釈できる．尚，最適消費・富比率は G の減少関数であったので，最適消費・富比率が実質金利の増加関数であることは，$G_r<0$ を意味していることに留意せよ．

そして，近似解と厳密解を比較すると，殆ど一致しており，近似精度は非常に高い．ただ，実質金利が高金利水準（約 2%）に達すると，近似消費・富比率は厳密消費・富比率に対し非常に僅かながら下方に乖離している（図 8 参照）．

これは近似値 $\tilde{G}_r$ が高金利水準では厳密値 G_r に対し上方に僅かながら乖離していること（$G_r<\tilde{G}_r<0$）を示している．

次に，近似解析解と厳密解を株式指数の最適投資比率で比較した（図 9 参照）．実質金利が高金利水準（約 2%）に達するまでは，近似投資比率は厳密投資比率と殆ど一致しているが，同水準を超えると，厳密投資比率に対する上方乖離が僅かながら生じている．$(\gamma,\zeta)=(5.0,1.25)$ の場合，(5.80) 式において，

$$\frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)}\Sigma>0,$$

であることを考慮すると，高金利水準における近似値 $\tilde{G}_r$ の厳密値 G_r に対する上方乖離（$G_r<\tilde{G}_r<0$）が近似投資比率の厳密投資比率に対する上方乖離をもたらしているのである．ただ，同乖離は非常に限定的であり，近似精度は非常に高いと評価できる．

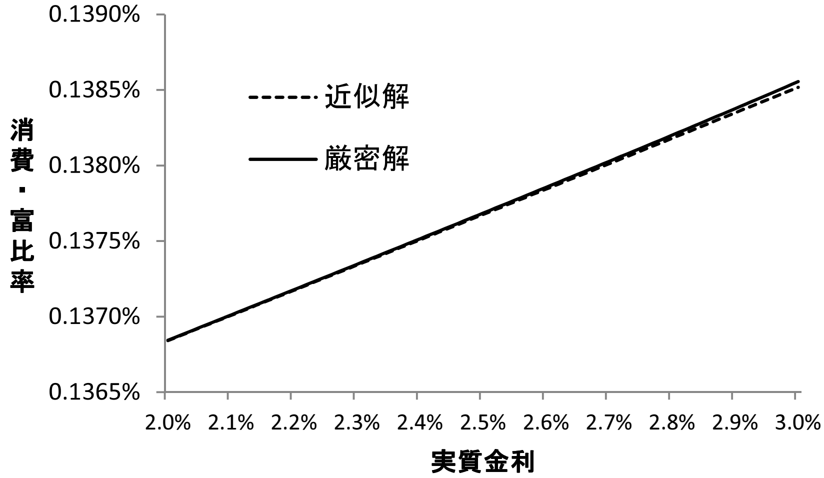

図 8: $(\gamma, \zeta) = (5.0, 1.25)$ の場合の高金利水準における近似最適消費・富比率の近似精度

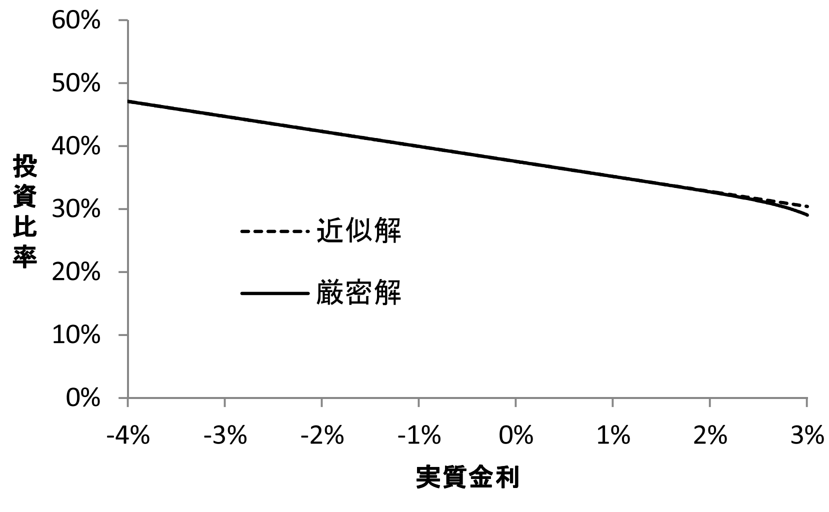

図 9: $(\gamma, \zeta) = (5.0, 1.25)$ の場合の近似最適投資比率の近似精度

6.　相似拡大的頑健効用消費者の無限時間証券投資問題

本章では，相似拡大的頑健効用消費者の無限時間証券投資問題を考察する．[12]

6.1.　相似拡大的頑健効用と消費者の消費と証券投資の最適化問題

ナイトの不確実性下，相似拡大的頑健効用[13]（Maenhout [30]）を有する消費者は現実の確率測度として P を尤も有り得べき確率測度（以下,「参考確率」と呼ぶ）と認識しているが，参考確率 P 以外の確率測度である可能性を否定できない．そこで，消費者は参考確率 P 以外の確率測度の候補として，全ての等価確率測度[14]の集合 $\mathbb{P}$ を想定する．尚，任意の等価確率測度 P^ξ は，Girsanov の定理により，Novikov の可積分条件を満たす可測過程 ξ により，Radon-Nikodým 微分として，次式のように表現されることに留意せよ．

$$\frac{d\mathrm{P}^\xi}{d\mathrm{P}} = \exp\left(\int_0^\infty \xi_t\,dB_t - \frac{1}{2}\int_0^\infty \xi_t'\xi_t dt\right).$$

そして，消費者は各消費計画に対し最悪の場合の等価確率測度を想定して，$\mathbb{P}$ 上で期待効用汎関数を最小化する等価確率測度（以下,「最悪確率」と呼ぶ）を求める．この際，参考確率 P を尤も有り得べき確率と認識している以上，参考確率 P と大幅に乖離する最悪確率を想定することは慎重を通り越して杞憂の謗りを免れない．そこで，最悪確率決定時に参考確率 P との乖離を次のように制御する相似拡大的頑健効用を効用汎関数とする[15].

$$U(c) = \inf_{\mathrm{P}^\xi\in\mathbb{P}} \mathrm{E}^\xi\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\left\{\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_t^\xi(c)}{2\delta}\,\xi_t'\xi_t\right\}dt\right], \tag{6.1}$$

ここで，E^ξ は P^ξ の下での期待値，β は割引率，γ は相対的危険回避度，δ は「曖昧性の回避度合」を表す正の定数，U_t^ξ は次式で再帰的に定義される効用過程である．

$$U_t^\xi(c) = \mathrm{E}_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}\left\{\frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_s^\xi(c)}{2\delta}\,\xi_s'\xi_s\right\}ds\right]. \tag{6.2}$$

以下では，δ を「相対的曖昧性回避度」と呼ぶ.

留意点 6.1. *(6.1)* 式において，$\delta \searrow 0$ とすると，最小化問題の結果得られる最悪確率は $\xi^* = 0$，すなわち $\mathrm{P}^{\xi^*} = \mathrm{P}$ となり，相似拡大的頑健効用は *CRRA* 効用に縮退する．相似拡大的頑健効用は，経済学で標準的効用とされてきた *CRRA* 効用を，ナイトの不確実性の存在する環境に，相似拡大性を保持しながら拡張したものと解釈できる．

仮定 6.1. 消費者は相似拡大的頑健効用 *(6.1)* の最大化を企図する．

間接効用汎関数 J^ξ が次式で再帰的に定義される．

$$J^\xi(\mathbb{X}_t) = \mathrm{E}_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}\left\{\frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J^\xi(\mathbb{X}_s)}{2\delta}\,\xi_s'\xi_s\right\}ds\right]. \tag{6.3}$$

[12]本章は，バトボルド他 [7] の研究成果である．

[13]相似拡大的頑健効用は，Anderson *et al.* [2] が提案した「頑健効用」に相似拡大性を付与すべく，Maenhout [30] が修正したものである．

[14]ここで，$\tilde{\mathrm{P}}$ が P の等価確率測度とは，両測度の零集合が一致している場合（$\mathrm{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathrm{P}}(A) = 0$）を言う．

[15]相似拡大的頑健効用の本表現は，Skiadas [34] による割引相対エントロピー過程 $\mathcal{R}_t^\xi$ の次式の表現を利用している．

$$\mathcal{R}_t^\xi = \frac{1}{2}\mathrm{E}_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}\xi_s'\xi_s ds\right].$$

このとき，本稿における消費と投資の最適化問題及び価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \inf_{\mathrm{P}^\xi \in \mathbb{P}} J^\xi(\mathbb{X}_0). \tag{6.4}$$

6.2. 最悪確率と最適消費・投資の決定

本節では，頑健性確保のための最悪確率の決定問題を解いた後，同確率を織り込んだ HJB 方程式から推測された価値関数を構成する未知関数 $G(X_t)$ の偏微分方程式を導出する．

6.2.1. 最悪確率の決定

最悪確率候補としての等価確率測度 P^ξ の下での標準ブラウン運動 B_t^ξ は，

$$B_t^\xi = B_t - \int_0^t \xi_s \, ds,$$

と表されるので，等価確率測度 P^ξ の下での状態変数に関する確率微分方程式は次のように書き改められる．

$$d\mathbb{X}_t = \left(\begin{pmatrix} W_t(r_t + \Psi_t'\Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix} \xi_t \right) dt + \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix} dB_t^\xi. \tag{6.5}$$

従って，相似拡大的頑健効用における最適化の必要条件である HJB 方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \inf_{\mathrm{P}^\xi \in \mathbb{P}} \Bigg\{ &\begin{pmatrix} W_t\left(r_t + \Psi_t'\Lambda_t\right) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_W^\xi \\ J_X^\xi \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_{WW}^\xi & J_{WX}^\xi \\ J_{XW}^\xi & J_{XX}^\xi \end{pmatrix} \right] \\ &- \beta J^\xi + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J^\xi}{2\delta} \xi_t'\xi_t + \xi_t' \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_W^\xi \\ J_X^\xi \end{pmatrix} \Bigg\} = 0, \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\text{s.t.} \quad \lim_{T \to \infty} \mathrm{E}[e^{-\beta T} J^\xi(\mathbb{X}_T)] = 0.$$

HJB 方程式 (6.6) における ξ に関する最小化条件より，最悪確率測度 P^{ξ^*} が次のように求められる．

$$\xi_t^* = -\frac{\delta}{(1-\gamma)J^*} \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^* \end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

ここで，J^* は最悪確率下の間接効用 J^{ξ^*} の簡略表記である．

留意点 6.2. 予算制約式 *(2.21)* 式，最悪確率 *(6.7)* 式より，最悪確率下の予算制約式は次式のように表される．

$$\frac{dW_t}{W_t} = \left\{ r_t + \Psi_t' \left(\Lambda_t - \frac{\delta}{(1-\gamma)J^*} \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^* \end{pmatrix} \right) - \frac{c_t}{W_t} \right\} dt + \Psi_t' \, dB_t^{\xi^*}. \tag{6.8}$$

(6.8) 式の富の実質期待収益率における投資 Ψ_t' の積の対象となっている括弧内の項は，相対的曖昧性回避度 δ の消費者にとっての，最悪確率における単位投資リスク当たりの対価と解釈できる．留意点 *2.1* で示したように，曖昧性が考慮されない場合の単位投資リスク当たりの対価は，全消費者共通のリスクの市場価格であったのに対し，相似拡大的頑健効用消費者

にとっての最悪確率下の単位投資リスク当たりの対価は，相対的曖昧性回避度に依存しており，消費者によって異なることを示している．*(6.8)* 式は，より曖昧性回避的な相似拡大的頑健効用消費者であるほど，最悪確率において，単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも低く想定し，その結果，最悪確率下の富過程の実質期待超過収益率を低く想定することを示している．

最悪確率測度 P^* を HJB 方程式 (6.6) に代入すると，次式を得る．

$$\sup_{u\in\mathcal{B}(X_0)}\left[\begin{pmatrix} W_t\left(r_t+\Psi_t'\Lambda_t\right)-c_t \\ K(\theta-X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^*\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW}^* & J_{WX}^* \\ J_{XW}^* & J_{XX}^*\end{pmatrix}\right]\right.$$
$$\left.-\beta J^*+\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\frac{\delta}{2(1-\gamma)J^*}\begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^*\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^*\end{pmatrix}\right]=0. \quad (6.9)$$

6.2.2. 最悪確率下の最適消費・投資の決定

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解 $u^*=(c^*,\Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (6.10)$$
$$\Psi_t^* = \frac{\pi_t}{W_t^2\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}, \quad (6.11)$$

ここで，

$$\pi_t=W_t\left\{-V_W\Lambda_t+\Sigma'\left(\frac{\delta V_W}{(1-\gamma)V}V_X-V_{XW}\right)\right\}. \quad (6.12)$$

留意点 6.3. *(6.11)* 式は次のように書き換えられる．

$$\Psi_t^*=\frac{-V_W}{W_t\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\Lambda_t+\Sigma'\frac{\frac{\delta V_W}{(1-\gamma)V}V_X-V_{XW}}{W_t\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}. \quad (6.13)$$

危険証券（非短期債）に対する需要は *2* 項に分解される．第 *1* 項は潜在変数の変化を考慮しない近視眼的需要を表している．第 *2* 項は，潜在変数の変化に伴い将来の効用が変動するリスクに対する保険需要を表している．この効用の変動リスクは，状態変数 X_t の変動に起因する投資機会集合（予算制約式）の変化から生じるものと解釈できる．

最適消費 (6.10) 式と最適投資 (6.11) 式を HJB 方程式 (6.9) に代入し，

$$W_tV_W\Lambda_t'\Psi_t^*+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX}\end{pmatrix}\right]$$
$$-\frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\begin{pmatrix} V_W \\ V_X\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} V_W \\ V_X\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'V_{XX}\right]-\frac{\delta}{2(1-\gamma)V}V_X'\Sigma\Sigma'V_X-\frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}, \quad (6.14)$$

に注意して整理すると，次の価値関数 V に関する偏微分方程式が得られる．

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V}V_X'\Sigma\Sigma' V_X - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^2\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)} + W_t r_t V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X + \frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \beta V = 0. \tag{6.15}$$

価値関数は X_t の未知関数 $G(X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$V(\mathbb{X}_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\gamma}. \tag{6.16}$$

(6.16) 式で表される価値関数 V に偏微分を施し，(6.11) 式に代入し，価値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (6.15) に代入すると，次の命題を得る．

命題 6.1. 仮定 *2.1*・*2.2*・*6.1* の下，本問題 *(6.4)* の最適消費，最適投資は，それぞれ *(6.17)* 式，*(6.18)* 式を満たしており，価値関数 V を構成する未知関数 $G(X_t)$ は *2* 階の偏微分方程式 *(6.19)* の解である．

$$c_t^* = \frac{W_t}{G(X_t)}, \tag{6.17}$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\Lambda_t + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\Sigma'\frac{G_X(X_t)}{G(X_t)}, \tag{6.18}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G} + \left\{K(\theta - X_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_t'\Sigma\right\}\frac{G_X}{G} + \frac{1}{G} - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_t - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \tag{6.19}$$

留意点 6.4. 以下では，相対的危険回避度と相対的曖昧性回避度の和を「相対的不確実性回避度」，相対的不確実性回避度の逆数を「相対的不確実性許容度」と呼ぶことにする．*(6.18)* 式では，相似拡大的頑健効用消費者の最適投資が，単位投資リスク当たりの対価を相対的不確実性回避許容度で，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を「1− 相対的不確実性許容度」で重み付けた加重平均として表されている．留意点 *6.2* で，相似拡大的頑健効用消費者は，最悪確率下で単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも相対的曖昧性回避度に応じて低く想定することを示した．すなわち，相似拡大的頑健効用消費者は，最悪確率決定の第 *1* 段階で，単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも相対的曖昧性回避度に応じて低く想定し，消費・投資決定の第 *2* 段階で，第 *1* 段階で低く想定された最悪確率下の単位投資リスク当たりの対価を相対的危険回避度に応じてさらに低く評価する．*(6.18)* 式は，両回避度のかかる効果が相俟って，両回避度の和である相対的不確実性回避度が単位投資リスク当たりの対価を相対的に低く評価する一方，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を相対的に高く評価していることを示唆しており，非常に興味深い結果である．

証明. まず，最適消費は，

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \left\{\left(\frac{G}{W_t}\right)^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t}{G},$$

すなわち，(6.17) 式が得られる．

次に，価値関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$W_t V_W = (1-\gamma)V, \qquad V_X = \gamma V \frac{G_X}{G}, \qquad W_t^2 V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V,$$

$$W_t V_{XW} = \gamma(1-\gamma)V\frac{G_X}{G}, \qquad V_{XX} = \gamma V\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}.$$

価値関数の偏微分結果より，最適投資 (6.11) 式右辺の分子・分母は次のように表される．

$$\pi_t = V\left((\gamma-1)\Lambda_t + \gamma(\gamma+\delta-1)\Sigma'\frac{G_X}{G}\right), \tag{6.20}$$

$$W_t^2\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right) = (\gamma-1)(\gamma+\delta)V. \tag{6.21}$$

ゆえに，最適投資 (6.11) 式に (6.20)(6.21) 式を代入すると，(6.18) 式を得る．

価値関数 V の偏微分方程式 (6.15) における第 1 項〜第 3 項については，(6.20)(6.21) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V}V_X'\Sigma\Sigma' V_X - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^2\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\\
&\quad = \frac{\gamma}{2}V\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}\right] + \frac{\gamma^2\delta}{2(\gamma-1)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G}\\
&- \frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}V\left((\gamma-1)\Lambda_t' + \gamma(\gamma+\delta-1)\frac{G_X'}{G}\Sigma\right)\left((\gamma-1)\Lambda_t' + \gamma(\gamma+\delta-1)\frac{G_X'}{G}\Sigma\right)'\\
&\quad = V\left\{\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\Lambda_t'\Sigma'\frac{G_X}{G}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\gamma}{2}\left(\gamma - 1 + \frac{\gamma\delta}{\gamma-1} - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\right)\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right\}\\
&= \gamma V\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_t'\Sigma'\frac{G_X}{G} + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right\}.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

価値関数の偏微分方程式 (6.15) における第 6 項については，(6.10) 式と (6.17) 式を用いて整理すると，

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{1-\frac{1}{\gamma}} = \gamma\frac{V}{W}\left\{\left(\frac{G}{W}\right)^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \gamma\frac{V}{G}, \tag{6.23}$$

を得る．

(6.22)(6.23) 式等を価値関数の偏微分方程式 (6.15) に代入し，両辺を γV で除して整理すると，(6.19) 式が得られる． □

6.3. 対数線形近似法による近似解析解の導出

本節では，前節で導出された偏微分方程式の非斉次項を Campbell and Viceira [15]，楠田 [25] の方法で対数線形近似し，近似解析解を導出する．

6.3.1.　偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

非線形・非斉次偏微分方程式 (6.19) における非斉次項 $1/G$ を (4.22) 式で近似し，Λ_t，r_t に，それぞれ (2.3) 式，(2.4) 式を代入すると，次の近似偏微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right]&+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G}\\&+\left\{K(\theta-X_t)-\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma(\lambda+\Lambda X_t)\right\}'\frac{G_X}{G}-g_1\log G\\&+g_0-\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}(\lambda+\Lambda X_t)'(\lambda+\Lambda X_t)-\frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0+r'X_t)-\frac{\beta}{\gamma}=0. \quad (6.24)\end{aligned}$$

近似偏微分方程式 (6.24) の解は，次式で表される 2 次形式の指数関数と推測される．

$$G(X_t)=\exp\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right).$$

ここで，A は一般性を失うことなく対称行列である．

6.3.2.　近似解析解

関数 G に偏微分を施し，偏微分方程式 (6.24) に代入し，g_0 に (4.23) 式を代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left(aa'+A+aX_t'A+AX_ta'+AX_tX_t'A\right)\right]\\&\quad+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(a'+X_t'A\right)\Sigma\Sigma'\left(a+AX_t\right)\\&\quad+\left\{K\theta-\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma\lambda-\left(K+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma\Lambda\right)X_t\right\}'(a+AX_t)\\&\quad+g_1(1-\log g_1)-g_1\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)-\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\left(\lambda'\lambda+2\lambda'\Lambda X_t+X_t'\Lambda'\Lambda X_t\right)\\&\quad-\frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0+r'X_t)-\frac{\beta}{\gamma}=0. \quad (6.25)\end{aligned}$$

上式は X_t に関する恒等式なので，次の (a_0,a,A) に関する代数方程式が導出される．

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}a'\Sigma\Sigma'a+\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\Sigma\Sigma'A]+\left\{K\theta-\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma\lambda\right\}'a\\&\quad+g_1(1-a_0-\log g_1)-\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\lambda'\lambda-\frac{\gamma-1}{\gamma}r_0-\frac{\beta}{\gamma}=0, \quad (6.26)\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}A\Sigma\Sigma'a+AK\theta-K'a-\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}(A\Sigma\lambda+\Lambda'\Sigma'a)-g_1a-\frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\lambda-\frac{\gamma-1}{\gamma}r=0, \quad (6.27)$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}A\Sigma\Sigma'A-\left(K'+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'\Sigma'\right)A-\frac{1}{2}g_1A-\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\Lambda=0, \quad (6.28)$$

ここで，g_1 は (4.28) 式で表されている．

このとき，次の命題を得る．

命題 6.2. 仮定 *2.1*・*2.2*・*6.1* の下，本問題 *(6.4)* の近似価値関数，近似最適消費，近似最適投資は次を満たしている．

$$\tilde{V}(\mathbb{X}_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left[\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right], \tag{6.29}$$

$$\tilde{c}_t^* = W_t\exp\left[-\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right], \tag{6.30}$$

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\left(\lambda + \Lambda X_t\right) + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\Sigma'\left(a + AX_t\right), \tag{6.31}$$

ここで，(a_0, a, A) は代数方程式 *(6.26)*-*(6.28)* の解である．

留意点 6.5. 前章の *Epstein-Zin* 効用の場合の近似最適投資 *(5.29)* 式より，相対的危険回避度 $\hat{\gamma}$，相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）$\hat{\zeta}$ の *Epstein-Zin* 効用消費者の近似最適投資は次式で表される．

$$\hat{\Psi}_t = \frac{1}{\hat{\gamma}}(\lambda + \Lambda X_t) + \left(1 - \frac{1}{\hat{\gamma}}\right)\frac{\hat{\zeta}}{\hat{\zeta}-1}\Sigma'(a + AX_t). \tag{6.32}$$

相似拡大的頑健効用 (γ, δ) を持つ消費者と *Epstein-Zin* 効用 $(\hat{\gamma}, \hat{\zeta})$ を持つ消費者の回避度が次式の関係にある場合，

$$\begin{pmatrix}\hat{\gamma}\\ \hat{\zeta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}, \tag{6.33}$$

外部の観察者からは当該消費者が相似拡大的頑健効用 (γ, δ) を持っているのか，*Epstein-Zin* 効用 $(\hat{\gamma}, \hat{\zeta})$ を持っているのかを識別し難いということになる．これは，既に *Maenhout [30]* が，*Black-Scholes* 証券市場モデル（状態変数が富過程のみで，金利一定且つリスクの市場価格一定）の下，消費者が短期債と株式に投資する問題において指摘していることであるが，一般次元のアフィン潜在ファクター証券市場モデルの下，消費者が短期債，全満期の物価連動債，非債券主要指数に投資する本問題において再確認された．

7. 生保頑健運用問題

本章では，前章の相似拡大的頑健効用消費者の証券投資モデルの枠組みを生命保険の頑健運用問題に応用し，近似解析解を導出する．[16]

7.1. 生命保険会社のモデル化

生命保険会社は一般に死亡保険，生存保険，生死混合保険，医療保険等を販売している．我が国では，医療保険等の積立金額・運用残高は小さいので，生命保険会社の生命保険運用問題を考察する本稿では，死亡保険，生存保険，生死混合保険の3種の生命保険を対象とすれば十分である．また，生死混合保険は死亡保険と生存保険の混合保険なので，畢竟，生命保険会社のこれら3種の生命保険の販売に基づく保険料収入と解約返戻金・保険金等債務は生死混合保険で代表される．そこで本稿では，生死混合保険の代表的商品である養老保険を対象とする．尚，生死混合保険における死亡保険部分の積立金額・運用残高は小さいので，本稿の生命保険会社の運用モデル構築に際しては，生死混合保険における生存保険部分を中心に抽象化作業を行うことを予め留意されたい．

今，相互会社形態の生命保険会社（以下,「生保」）が一定年齢を満期とする契約期間 $\bar{\tau}$ 年，満期保険金が一口1円の一時払い養老保険を販売している．当該養老保険の予定利率，解約時の解約返戻金，死亡時の保険金については，次の仮定を置く．

仮定 7.1.
1. 生保は当該養老保険の保険料を予定利率（連続複利ベース）が満期までの期間 $\bar{\tau}$ の物価連動債の利率から一定率 κ_1（同）引き下げた利率となるように設定して販売している．すなわち，時点 t における当該養老保険の保険料は一口 $\exp(-\kappa_1\bar{\tau})P_t^{t+\bar{\tau}}$ 円に設定されている．
2. 契約者が時点 t で満期までの期間 τ の養老保険を解約した場合，一口当り $\exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau}$ 円の解約返戻金が支払われる．
3. 被保険者が時点 t に満期までの期間 τ を残して死亡した場合は，受取人に満期保険金（一口当り *1* 円）が支払われる．

被保険者が時点 t に満期までの期間 τ を残して死亡した場合に受取人に支払われる一口当りの満期保険金1円は養老保険における生存保険金（解約）価値 $\exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau}$ 円と死亡保険金価値 $(1-\exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau})$ 円の合計金額と解釈できる．まず，後者の死亡保険金支払いを除いた養老保険を考察する．このとき，生保は満期までの期間 τ の養老保険の各時点 t における販売と解約返戻金・保険金支払いを通じて市場価値

$$L_t^{t+\tau} = \exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau} \tag{7.1}$$

円の証券を売買していると見做せる．すなわち，生保の当該養老保険販売は一口当り $\exp(-\kappa_1\bar{\tau})P_t^{t+\bar{\tau}}$ 円の当該証券を空売りしており，当該養老保険解約時返戻金･死亡時保険金 $\exp(-\kappa_1\tau)P_t^{t+\tau}$ の支払いは当該証券の市場価値での買戻しと見做せる．そこで以下では，当該養老保険を当該生命保険会社のみが空売りでき，契約者・受取人のみが当該生保に解約時・死亡時に随時買戻しを請求できる特殊な店頭売買証券に見立てる．

このとき，満期 T の生命保険証券の市場価格 L^T について，(7.1) 式を微分し，(2.7) 式を用いると，次の確率微分方程式が得られる．

$$\frac{dL_t^T}{L_t^T} = (r_t + \Sigma\Lambda_t - \kappa_1)\,dt + \Sigma\,dB_t. \tag{7.2}$$

[16]本章は，バトボルド他 [8] の研究成果である．

当該養老保険を証券に見立てると，生保は当該養老保険の販売と解約返戻金・保険金支払いを通じて，満期までの期間 $[0,\bar{\tau}]$ の養老保険証券群の空売りポートフォリオを組成していると見做せる．

満期までの期間 $[\tau,\tau+d\tau]$ の養老保険の時点 t における富 W_t に対する保険債務比率（空売り投資比率）を $\pi_t(\tau)d\tau$ と表記する．すなわち，$\pi_t(\tau)$ は保険債務比率密度過程を表している．保険債務比率密度過程は，分母の富の成長率，分子の保険債務残高を減少させる死亡率と解約率に依存する．富の成長率，死亡率，解約率は，状態変数と満期までの期間に依存すると考えられるので，次のように仮定する．

仮定 7.2. 保険債務比率密度過程 $\pi_t(\tau)$ は次式に従う．

$$\pi_t(\tau)=\pi_0(\tau)+\pi(\tau)'X_t, \tag{7.3}$$

ここで，π_0,π は区間 $[0,\bar{\tau}]$ における可積分関数である．

各期 $[t,t+dt]$ における満期までの期間 $[\tau,\tau+d\tau]$ の死亡保険金支払い総額を考察するため，当該死亡保険金の契約口数を $\zeta_t(\tau)d\tau dt$ と表記する．被保険者の死亡率は一般に年齢の増加関数とされているので，満期までの期間のある減少関数 $\varepsilon_1(\tau)$ で表されると仮定する．このとき，各期 $[t,t+dt]$ における満期までの期間 $[\tau,\tau+d\tau]$ の死亡保険金支払い総額は $\varepsilon_1(\tau)\zeta_t(\tau)(1-\exp(-\kappa_1\bar{\tau})P_t^{t+\tau})d\tau dt$ と表される．これは次のように書き換えられる．

$$\varepsilon_1(\tau)\zeta_t(\tau)(1-\exp(-\kappa_1\bar{\tau})P_t^{t+\tau})d\tau dt=\varepsilon_1(\tau)\left(\frac{1}{\exp(-\kappa_1\bar{\tau})P_t^{t+\tau}}-1\right)\pi_t(\tau)W_t d\tau dt.$$

上式右辺の $(1/\exp(-\kappa_1\bar{\tau})P_t^{t+\tau}-1)$ は状態変数の関数であり，且つ満期までの期間の増加関数である．死亡保険の積立金額・運用残高は生存保険に比べて著しく小さく，積立金額・運用残高全体に対する占率が著しく小さいことを考慮し，状態変数の変動を無視するほか，満期までの期間 τ の影響については，τ の増加関数 $\varepsilon_1(\tau)$ の影響と相殺すると見做し，次式が成り立っていると仮定する．

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1(\tau)\left(\frac{1}{\exp(-\kappa_1\bar{\tau})P_t^{t+\tau}}-1\right), \tag{7.4}$$

ここで，ε_1 は正の定数である．

また，保険の販売，積立金の運用・管理等に係る役職員給与を除く諸経費は運用残高に比例すると仮定する．以上の考察より，次の仮定を設ける．

仮定 7.3.
1. 各期 $[t,t+dt]$ における満期までの期間 $[\tau,\tau+d\tau]$ の死亡保険金（生存保険価値除く）の支払い総額は $\varepsilon_1\pi_t(\tau)W_t d\tau dt$ である．
2. 各期 $[t,t+dt]$ における満期までの期間 $[\tau,\tau+d\tau]$ の保険積立金の運用・管理等に係る役職員給与を除く経費は $\varepsilon_2\pi_t(\tau)W_t d\tau dt$ である．ここで，ε_2 は正の定数．

以下では，富に対する全保険債務比率を $\mathit{\Pi}_t$ とそれぞれ略記する．すなわち，

$$\mathit{\Pi}_t=\int_0^{\bar{\tau}}\pi_t(\tau)\,d\tau. \tag{7.5}$$

仮定 7.3 の下，$\mathit{\Pi}_t$ は次式を満たしている．

$$\mathit{\Pi}_t=\mathit{\Pi}_0+\mathit{\Pi}'X_t, \tag{7.6}$$

ここで，

$$\Pi_0 = \int_0^{\bar{\tau}} \pi_0(\tau)\, d\tau, \qquad \Pi = \int_0^{\bar{\tau}} \pi(\tau)\, d\tau. \tag{7.7}$$

生保の効用汎関数の変数については，次の仮定を置く．

仮定 7.4. 生保は各期 $[t, t+dt]$ の基礎利益（内部留保除く）と役職員給与の合計金額 $c_t dt$ に基づく効用汎関数 $U(c)$ を所持している．

以下では，c_t を「基礎利益等」と呼ぶ．

7.2. 生保頑健運用問題

以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi_t = \left\{ \int_0^{\bar{\tau}} \Big(\varphi_t(\tau) - \pi_t(\tau) \Big) b(\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j b_j \right\}' \Sigma. \tag{7.8}$$

以下，Ψ_t を「純投資」と略称する．

以上より，生保の予算制約式が導かれる．

補題 7.1. 仮定 *2.1*，*2.2*，*7.1-7.4* の下，富過程 W は次の予算制約式を満たす．

$$dW_t = \{ W_t \left(r_t + \kappa \Pi_t + \Psi_t' \Lambda_t \right) - c_t \}\ dt + W_t \Psi_t\, dB_t, \tag{7.9}$$

ここで，$\kappa = \kappa_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

証明. 時点 t における満期までの期間 τ の物価連動債価格を $P_t(\tau)$，満期までの期間 τ の養老保険価格を $L_t(\tau)$ と表記する．短期安全証券，物価連動債，主要指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta^P, (\vartheta^P(\tau)), (\vartheta^i))$ とし，養老保険の契約口数を $(\vartheta^L(\tau))$ とすると，次式が成り立つ．

$$W_t = \vartheta_t^P P_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t^P(\tau) P_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{J} \vartheta_t^i S_t^j - \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t^L(\tau) L_t(\tau) d\tau. \tag{7.10}$$

このとき，自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^i))$ は，次式を満たしている．

$$\begin{aligned} dW_t &= \vartheta_t^P dP_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t^P(\tau) dP_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{J} \vartheta_t^i dS_t^j - \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t^L(\tau) dL_t(\tau) d\tau - \Big\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Pi_t W_t + c_t \Big\} dt \\ &= W_t \Bigg\{ \left(1 - \int_0^{\bar{\tau}} \Big(\varphi_t(\tau) - \pi_t(\tau) \Big) d\tau - \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j \right) \frac{dP_t}{P_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} d\tau - \int_0^{\bar{\tau}} \pi_t(\tau) \frac{dL_t(\tau)}{L_t(\tau)} d\tau \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Pi_t dt \Bigg\} - c_t dt. \end{aligned} \tag{7.11}$$

上式に，(2.6)(2.7)(2.9)(7.2) 式を代入し，整理すると，(7.9) 式を得る． □

仮定 7.5. 生保は各期 $[t, t+dt]$ の基礎的利益 $c_t dt$ に基づく，次式で表される相似拡大的頑健効用の最大化を企図する．

$$U(c) = \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} E^\xi \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \left\{ \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma) U_t^\xi(c)}{2\delta}\, \xi_t' \xi_t \right\} dt \right], \tag{7.12}$$

ここで，γ は相対的危険回避度，δ は相対的曖昧性回避度，U_t^ξ は次式で再帰的に定義される効用過程である．

$$U_t^\xi(c) = E_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}\left\{\frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_s^\xi(c)}{2\delta}\,\xi_s'\xi_s\right\}ds\right]. \tag{7.13}$$

また，予算制約式 (7.9) を満たす制御過程 $u_t = (c_t, \Psi_t)$ を初期状態 $\mathbb{X}_0 = (W_0, X_0')'$ に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を $\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{X}_0)$ と表記する．

間接効用汎関数」J^ξ が次式で再帰的に定義される．

$$J^\xi(\mathbb{X}_t) = \mathrm{E}_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}\left\{\frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J^\xi(\mathbb{X}_s)}{2\delta}\,\xi_s'\xi_s\right\}ds\right]. \tag{7.14}$$

このとき，生保頑健運用問題及び価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u\in\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{X}_0)}\ \inf_{\mathrm{P}^\xi\in\mathbb{P}} J^\xi(\mathbb{X}_t). \tag{7.15}$$

7.3. 生保頑健運用問題の近似解析解

生保頑健運用問題における最適投資の近似解析解を導出する．

7.3.1. 最悪確率の決定

最悪確率候補としての等価確率測度 P^ξ の下での標準ブラウン運動 B^ξ は，

$$B_t^\xi = B_t - \int_0^t \xi_s\,ds,$$

と表されるので，等価確率測度 P^ξ の下での状態過程 $\mathbb{X}_t$ に関する確率微分方程式は次のように書き改められる．

$$d\mathbb{X}_t = (\mu_t + \sigma_t\xi_t)\;dt + \sigma_t\,dB_t^\xi, \tag{7.16}$$

ここで，

$$\mu_t = \begin{pmatrix} W_t(r_t + \kappa\Pi_t + \Psi_t'\Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t)\end{pmatrix}, \qquad \sigma_t = \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}. \tag{7.17}$$

従って，相似拡大的頑健効用における最適化の必要条件である HJB 方程式は次式のように表される．

$$\sup_{u\in\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{X}_0)}\ \inf_{P^\xi\in\mathbb{P}}\left\{\mu_t' J_{\mathbb{X}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\sigma_t\sigma_t' J_{\mathbb{X}\mathbb{X}}\right] - \beta J + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J}{2\delta}\xi_t'\xi_t + \xi_t'\sigma_t' J_{\mathbb{X}}\right\} = 0, \tag{7.18}$$

$$\text{s.t.}\quad \lim_{T\to\infty}\mathrm{E}[e^{-\beta T}J\left(\mathbb{X}_T\right)] = 0.$$

HJB 方程式 (7.18) における ξ に関する最小化条件より，最悪確率測度 P^{ξ^*} が次のように求められる．

$$\xi_t^* = -\frac{\delta}{(1-\gamma)J}\sigma_t' J_{\mathbb{X}}. \tag{7.19}$$

最悪確率測度 P^{ξ^*} を HJB 方程式 (7.18) に代入すると，次式を得る．

$$\sup_{u\in\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{X}_0)}\left[\mu_t' J_{\mathbb{X}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\sigma_t\sigma_t' J_{\mathbb{X}\mathbb{X}}\right] - \beta J + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)J}J_{\mathbb{X}}'\sigma_t\sigma_t' J_{\mathbb{X}}\right] = 0. \tag{7.20}$$

7.3.2. 最悪確率下の効用最大化

HJB 方程式における最大化の必要条件から制御変数の最適解 $u^* = (c^*, \varPsi^*)$ は次式を満たしている．

$$
\begin{aligned}
c_t^* &= V_W^{-\frac{1}{\gamma}}, &(7.21)\\
\varPsi_t^* &= \frac{-V_W \Lambda_t}{W_t^* \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)} + \frac{\Sigma' \left(\frac{\delta V_W}{(1-\gamma)V} V_X - V_{XW}\right)}{W_t^* \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}, &(7.22)
\end{aligned}
$$

ここで，W_t^* は最適制御 u^* により達成される富過程である．

最適基礎利益等 (7.21) 式と最適純投資 (7.22) 式を HJB 方程式 (7.20) に代入して得られる偏微分方程式から間接効用関数は X_t の未知関数 $G(X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$
V(\mathbb{X}_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(G(X_t)\right)^{\gamma}. \tag{7.23}
$$

間接効用関数 V に偏微分を施し，上記偏微分方程式に代入すると，次の命題を得る．

命題 7.1. 仮定 *2.1*，*2.2*，*7.1-7.5* の下，本問題 *(7.15)* の最適基礎利益等，最適純投資は，それぞれ *(7.24)* 式，*(7.25)* 式を満たしており，関数 J を構成する未知関数 $G(X_t)$ は偏微分方程式 *(7.26)* の解である．

$$
\begin{aligned}
c_t^* &= \frac{W_t^*}{G}, &(7.24)\\
\varPsi_t^* &= \frac{1}{\gamma+\delta}\Lambda_t + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Sigma' \frac{G_X'}{G}, &(7.25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' \frac{G_{XX}}{G}\right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G} + \left\{K(\theta - X_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_t'\Sigma\right\}\frac{G_X}{G} + \frac{1}{G}\\
&\qquad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t + \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_t + \kappa\varPi_t) + \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0. \qquad (7.26)
\end{aligned}
$$

7.3.3. 対数線形近似法による近似解の導出

偏微分方程式 (7.26) は非斉次項 $1/G$ を次式で対数線形近似する．

$$
\frac{1}{G(X_t)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t),
$$

ここで，g_0 は (4.23) 式，g_1 は (4.24) 式で与えられている．

そして，Λ_t，r_t に，それぞれ (2.3) 式，(2.4) 式を代入すると，次の近似偏微分方程式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G} + \left\{K(\theta - X_t) - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma(\lambda + \Lambda X_t)\right\}'\frac{G_X}{G}\\
&- g_1 \log G + g_0 - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}(\lambda+\Lambda X_t)'(\lambda+\Lambda X_t) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\{r_0 + \kappa\varPi_0 + (r+\kappa\varPi)'X_t\} - \frac{\beta}{\gamma} = 0.
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

近似偏微分方程式 (7.27) の解が (4.26) 式で表される 2 次形式の指数関数であることは容易に推測される．

このとき，g_1 は補題 4.1 で計算される．関数 $G(X_t)$ が近似偏微分方程式 (7.27) の解として近似されている場合の間接効用関数，最適基礎利益等，最適純投資をそれぞれ「近似間接効用関数」,「近似最適基礎利益等」,「近似最適純投資」と呼び，それぞれ $\tilde{J}, \tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*$ と表記する．このとき，次の命題を得る．

命題 7.2. 仮定 *2.1*，*2.2*，*7.1-7.5* の下，本問題 *(7.15)* の近似最適基礎利益等，近似最適投資は次を満たしている．

$$\tilde{c}_t^* = W_t^* \exp\left[-\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right], \tag{7.28}$$

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta}(\lambda + \Lambda X_t) + \frac{\gamma(\gamma+\delta)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Sigma'(a + AX_t), \tag{7.29}$$

ここで，(a_0, a, A) は代数方程式 *(7.30)-(7.32)* の解である．

$$\begin{aligned}\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}a'\Sigma\Sigma'a + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma'A] + \left\{K\theta - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma\lambda\right\}'a \\ + g_1(1 - a_0 - \log g_1) - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + \kappa\mathit{\Pi}_0) - \frac{\beta}{\gamma} = 0,\end{aligned} \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}A\Sigma\Sigma'a + AK\theta - K'a - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}(A\Sigma\lambda + \Lambda'\Sigma'a) \\ - g_1a - \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r + \kappa\mathit{\Pi}) = 0,\end{aligned} \tag{7.31}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}A\Sigma\Sigma'A - \left(K' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'\Sigma'\right)A - \frac{1}{2}g_1A - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\Lambda = 0, \tag{7.32}$$

ここで，g_1 は *(4.28)* 式で表されている．

8. アフィン潜在ファクター国際証券市場モデル

本章では，菊池 [21] のアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルについて紹介する．

8.1. アフィン潜在ファクター国際証券市場モデル

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する．ナイトの不確実性下，消費者共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ によりモデル化されている．ここで，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は $\bar{N}$ 次元標準ブラウン運動 B_t によって生成される自然なフィルター付けである．

国内市場では，1 種類の消費財と次に説明する諸証券が流通している．諸証券として，安全証券 (以下,「短期安全証券」と呼ぶ),「中長期安全証券」としての信用リスクの無い割引物価連動債（以下,「物価連動債」と呼ぶ）で，満期までの期間が最長 $\bar{\tau}$，額面 1 円の任意満期の物価連動債，J 種類，種類の非債券の主要指数（株式指数，REIT 指数等）が任意の時点で市場で取引されている．海外市場は，通貨の相異なる N 国の第 n 国（ここで，$n \in \{1, \cdots, N\}$，以下同様）において，満期までの期間が最長 $\hat{\tau}_n$，額面 1 第 n 国通貨単位の任意満期の物価連動債，$\hat{J}_n$ 種類の非債券の主要指数が任意の時点で市場で取引されている．また，各国間で為替取引が任意の時点で行われている．

以下では，消費財を価値基準財とし，諸証券の価格は実質価格で表示される．国内における短期安全証券の実質価格を P_t 円，満期 T の物価連動債の実質価格を P_t^T 円，非債券第 j 指数の配当込みの実質価格を S_t^j 円と表記し，海外の第 n 国における満期 T の物価連動債の実質価格を $\hat{P}_{nt}^T$ 第 n 国通貨単位，非債券第 j 指数の実質価格を $\hat{S}_{nt}^j$ 第 n 国通貨単位と表記する．消費財空間は非負値可測過程の空間とする．

菊池 [21] は，Mamaysky [31] のアフィン潜在ファクター株式市場モデルと Leippold and Wu [28] の国際証券市場モデルを結合した，一般性の高いアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルを提案している．しかし，同モデルでは，株式価格過程をモデル化するための潜在ファクターが非定常であるため，潜在ファクターの定常性に基づく対数線形近似法が適用できなくなる．そこで，本稿では，菊池 [21] のアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルにおける非定常項を捨象したモデルを仮定する．

仮定 8.1. $\bar{N}$ 次元潜在ファクターは M 次元ファクター X と N 次元ファクター Y から成り，各ファクターは次の確率過程に従う．

$$\begin{aligned} dX_t &= K_X(\theta_X - X_t)\,dt + \Sigma_X\,dB_t^X, \qquad (8.1)\\ dY_t &= K_Y(\theta_Y - Y_t)\,dt + \Sigma_Y\,dB_t^Y, \qquad (8.2)\end{aligned}$$

ここで，θ_X は M 次元定数ベクトル，θ_Y は N 次元定数ベクトル，K_X, Σ_X は $M \times M$ 定数行列，K_Y, Σ_Y は $N \times N$ 定数行列である．また，(K_X, K_Y) は次のように対角化可能な正値対称行列である．

$$L_X = Q_X^{-1} K_X Q_X \begin{pmatrix} l_1^X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2^X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_M^X \end{pmatrix}, \qquad L_Y = Q_Y^{-1} K_Y Q_Y \begin{pmatrix} l_1^Y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2^Y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N^Y \end{pmatrix},$$

ここで，$l_1^X, l_2^X, \cdots, l_M^X, l_1^Y, l_2^Y, \cdots, l_N^Y > 0$ であることに留意．

アフィン定常潜在ファクター国際証券市場モデルでは，潜在ファクター X_t が世界経済の実物面の変動要因として，潜在ファクター Y_t が為替レートの変動要因としてモデル化されている．

仮定 8.2. *1.* 国内（海外第 n 国）の状態価格密度過程 π_t（同 $\hat{\pi}_t^n$）は，国内（海外第 n 国）の金利期間構造の状態価格密度過程 ρ_t（同 $\hat{\rho}_t^n$）と指数マルチンゲール ν_t（同 $\hat{\nu}_t^n$）の積で表される．

$$\pi_t = \rho_t \, \nu_t, \qquad \hat{\pi}_t^n = \hat{\rho}_t^n \, \hat{\nu}_t^n, \tag{8.3}$$

ここで，指数マルチンゲール ν_t（同 $\hat{\nu}_t^n$）のボラティリティは，潜在ファクター Y_t（同 Y_t）のアフィン関数である．

$$\frac{d\nu_t}{\nu_t} = -\Lambda_t^Y \, dB_t^Y, \qquad \frac{d\hat{\nu}_t^n}{\hat{\nu}_t^n} = -\hat{\Lambda}_{nt}^Y \, dB_t^Y, \tag{8.4}$$

ここで，

$$\Lambda_t^Y = \lambda_Y + \Lambda_Y Y_t, \qquad \hat{\Lambda}_{nt}^Y = \hat{\lambda}_Y^n + \hat{\Lambda}_Y^n Y_t, \tag{8.5}$$

2. 国内（海外）のリスクの市場価格 Λ_t^X（同 $\hat{\Lambda}_{nt}^X$）は，潜在ファクター X_t（同 X_t）のアフィン関数である．

$$\Lambda_t^X = \lambda_X + \Lambda_X X_t, \qquad \hat{\Lambda}_{nt}^X = \hat{\lambda}_X^n + \hat{\Lambda}_X^n X_t, \tag{8.6}$$

ここで，$K_X + \Sigma_X \Lambda_X$ は正則である．

3. 国内（海外第 n 国）の瞬間的スポット・レート r_t（同 $\hat{r}_{nt}$）は潜在ファクター X_t（同 X_t）のアフィン関数である．

$$r_t = r_0 + r' X_t, \qquad \hat{r}_{nt} = \hat{r}_{0n} + \hat{r}_n' X_t. \tag{8.7}$$

4. 国内（海外第 n 国）の配当過程 D_t（同 $\hat{D}_{nt}$）は潜在ファクター X_t（同 X_t）の次式で表される関数である．

$$D_t^j = (d_j^0 + d_j' X_t) \exp(b_j^0 t + b_j' X_t), \qquad \hat{D}_{nt}^j = (\hat{d}_{nj}^0 + \hat{d}_{nj}' X_t) \exp(\hat{b}_{nj}^0 t + \hat{b}_{nj}' X_t). \tag{8.8}$$

8.2. 証券価格過程と予算制約式

補題 8.1. 仮定 *8.1*・*8.2* の下，以下が成立する．

1. 国内証券の無裁定実質価格過程は次を満たしている．

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{P_t} &= r_t \, dt, & P_0 = 1, \quad (8.9) \\ \frac{dP_t^T}{P_t^T} &= \left(r_t + b(\tau)' \Sigma_X \Lambda_t^X \right) dt + b(\tau)' \Sigma_X \, dB_t^X, & P_T^T = 1, \quad (8.10) \end{aligned}$$

ここで，$b(\tau)$ は次式で与えられている．

$$b(\tau) = (K_X + \Sigma_X \Lambda_X)'^{-1} \Big(e^{-\tau (K_X + \Sigma_X \Lambda_X)'} - I_M \Big) r. \tag{8.11}$$

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = \left(r_t + b_j' \Sigma_X \Lambda_t^X \right) dt + b_j' \Sigma \, dB_t^X, \tag{8.12}$$

ここで，b_j は次式で与えられている．

$$b_j = (K_X + \Sigma_X \Lambda_X)'^{-1} (d_j - r). \tag{8.13}$$

2. 海外第 n 国との無裁定実質為替レート過程 ε_{nt} は次を満たしている．

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_{nt}}{\varepsilon_{nt}} &= \{r_t - \hat{r}_{nt} + (\Lambda_t^X - \hat{\Lambda}_{nt}^X)'\Lambda_t^X + (\Lambda_t^Y - \hat{\Lambda}_{nt}^Y)'\Lambda_t^Y\}dt \\ &\quad + (\Lambda_t^X - \hat{\Lambda}_{nt}^X)'dB_t^X + (\Lambda_t^Y - \hat{\Lambda}_{nt}^Y)'dB_t^Y. \quad (8.14)\end{aligned}$$

3. 海外第 n 国証券の円建て無裁定実質価格過程は次を満たしている．

$$\begin{aligned}\frac{d(\hat{P}_{nt}^T\varepsilon_t)}{\hat{P}_{nt}^T\varepsilon_{nt}} &= \left\{r_t + \left(\hat{b}_n(\tau)'\Sigma_X + (\Lambda_t^X - \hat{\Lambda}_{nt}^X)'\right)\Lambda_t^X + (\Lambda_t^Y - \hat{\Lambda}_{nt}^Y)'\Lambda_t^Y\right\} dt \\ &\quad + \left(\hat{b}_n(\tau)'\Sigma_X + (\Lambda_t^X - \hat{\Lambda}_{nt}^X)'\right) dB_t^X + (\Lambda_t^Y - \hat{\Lambda}_{nt}^Y)'\, dB_t^Y, \quad (8.15)\end{aligned}$$

ここで，$\hat{b}_n(\tau)$ は次式で与えられている．

$$\hat{b}_n(\tau) = (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)'^{-1}\left(e^{-\tau(K_X+\Sigma_X\Lambda_X)'} - I_M\right)\hat{r}_n. \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned}\frac{d(\hat{S}_{nt}^j\varepsilon_{nt})}{\hat{S}_{nt}^j\varepsilon_{nt}} &= \left\{r_t + \left(\hat{b}_{nj}'\Sigma_X + (\Lambda_t^X - \hat{\Lambda}_{nt}^X)'\right)\Lambda_t^X + (\Lambda_t^Y - \hat{\Lambda}_{nt}^Y)'\Lambda_t^Y\right\} dt \\ &\quad + \left(\hat{b}_{nj}'\Sigma_X + (\Lambda_t^X - \hat{\Lambda}_{nt}^X)'\right) dB_t^X + (\Lambda_t^Y - \hat{\Lambda}_{nt}^Y)'\, dB_t^Y, \quad (8.17)\end{aligned}$$

ここで，$\hat{b}_{nj}$ は次式で与えられている．

$$\hat{b}_{nj} = (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)'^{-1}(\hat{d}_{nj} - \quad \hat{r}_n). \quad (8.18)$$

留意点 8.1. *(8.14)* 式は為替レートが内外金利差に加え，世界経済の実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差と為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差により変動することを表している．為替レートの変動要因として，内外金利差は指摘されて久しいが，世界経済の実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差と為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差は，筆者の知り得る限り，指摘されたことを聞かない，非常に興味深い結果である．また，*(8.15)(8.17)* 式は，その帰結として，海外証券の円建て価格のボラティリティに世界経済の実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差と為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差が現れており，これも興味深い結果である．

証明. 国内証券の無裁定価格過程 (8.9)(8.10)(8.12) については，補題 2.1 の証明を参照せよ．為替レートと海外証券価格は，菊池 [21] に沿って証明する．

まず，国内外の金利期間構造の状態価格密度過程は，定義より，次式を満たしている．

$$\frac{d\rho_t}{\rho_t} = -r_t dt - \Lambda_t^X\, dB_t^X, \qquad \frac{d\hat{\rho}_t^n}{\hat{\rho}_t^n} = -\hat{r}_t dt - \hat{\Lambda}_{nt}^X\, dB_t^X. \quad (8.19)$$

次に，国内外の状態価格密度過程の関係については，定義より，次式が成り立っている．

$$\hat{\pi}_t^n = \pi_t^n\varepsilon_t^n. \quad (8.20)$$

よって，(8.20) 式に，(8.3) 式を代入し，自然対数をとると，

$$\log\varepsilon_t^n = \log\hat{\rho}_t^n + \log\hat{\nu}_t^n - \log\rho_t - \log\nu_t. \quad (8.21)$$

上式を伊藤の補題を用いて微分し，(8.19) 式と (8.4) 式を代入すると，(8.14) 式が導かれる．

海外証券については，まず，第 n 国物価連動債の当該国通貨における無裁定条件から次式が成り立っている．

$$\frac{d\hat{P}^T_{nt}}{\hat{P}^T_{nt}} = \left(\hat{r}_t + \hat{b}_n(\tau)'\Sigma_X \hat{\Lambda}^X_t\right) dt + \hat{b}_n(\tau)'\Sigma_X \, dB^X_t. \tag{8.22}$$

ゆえに，$\hat{P}^T_{nt}\varepsilon^n_t$ を微分し，(8.14) 式と (8.22) 式を代入すると，(8.15) 式が得られる．海外の非債券主要指数についても，同様にして，(8.17) 式を得る． □

国内（海外第 n 国）の非債券第 j 指数に対する投資比率を Φ^j_t（同 $\hat{\Phi}^j_{nt}$）と表記する．また，海外第 n 国の投資対象主要指数を $\hat{J}_n$ 種類とする．

物価連動債については，任意の満期の物価連動債を投資対象としているため，富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる．そこで，国内（海外第 n 国）の物価連動債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$（同 $\hat{\varphi}_{nt}(\tau)$）と表記する [17]．以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi^P_t = \Sigma'_X \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) b(\tau)\, d\tau, \qquad \Psi^S_t = \Sigma'_X \sum_{j=1}^{J} \Phi^j_t b_j,$$

$$\hat{\Psi}^P_{Xt} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\bar{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau) \left(\Sigma'_X \hat{b}_n(\tau) + (\Lambda^X_t - \hat{\Lambda}^X_{nt})\right) d\tau,$$

$$\hat{\Psi}^S_{Xt} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\Phi}^j_{nt} \left(\Sigma'_X \hat{b}_{nj} + (\Lambda^X_t - \hat{\Lambda}^X_{nt})'\right),$$

$$\hat{\Psi}^P_{Yt} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\bar{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau)\, d\tau \,(\Lambda^Y_t - \hat{\Lambda}^Y_{nt})', \qquad \hat{\Psi}^S_{Yt} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\Phi}^j_{nt} (\Lambda^Y_t - \hat{\Lambda}^Y_{nt})',$$

$$\Psi^X_t = \Psi^P_t + \Psi^S_t + \hat{\Psi}^P_{Xt} + \hat{\Psi}^S_{Xt}, \qquad \Psi^Y_t = \hat{\Psi}^P_{Yt} + \hat{\Psi}^S_{Yt}.$$

また，Ψ_t を次式で定義し,「投資制御過程」乃至は「投資」と略称する．

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} \Psi^X_t \\ \Psi^Y_t \end{pmatrix}. \tag{8.23}$$

このとき，消費者の予算制約式が次の補題で示される．

補題 8.2. 投資過程 Ψ_t と消費過程 c_t を所与とする．このとき，仮定 *8.1*・*8.2* の下，富過程 W_t は次の予算制約式を満たす．

$$dW_t = \{W_t (r_t + \Psi'_t \Lambda_t) - c_t\}\, dt + W_t \Psi'_t \, dB_t, \tag{8.24}$$

ここで，

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} \Lambda^X_t \\ \Lambda^Y_t \end{pmatrix}, \qquad B_t = \begin{pmatrix} B^X_t \\ B^Y_t \end{pmatrix}.$$

[17] ある特定の満期の物価連動債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため，許容される国内（海外第 n 国）の物価連動債投資比率密度関数 φ（同 $\hat{\varphi}_n$）の空間は超関数を含む関数空間とする．

証明．本稿では，国内証券価格を価値基準財とする実質価格を対象としてきたが，ここではまず，円建ての名目価格を対象とする．すなわち，満期までの期間τの国内（海外第n国）物価連動債の名目価格を$\tilde{P}_t(\tau)$（同$\tilde{P}_{nt}(\tau)$），国内（海外第n国）主要指数の配当込みでない名目価格を$\tilde{S}_t^{*j}$（同$\tilde{S}_{nt}^{*j}$）と表記する．また，ある拡散過程に従う一般物価過程をp_tと表記する．

このとき，国内短期安全証券，国内物価連動債，国内主要指数，海外物価連動債，海外主要指数から組成されるポートフォリオを$(\vartheta,(\vartheta(\tau)),(\vartheta^{*j}),(\hat{\vartheta}_n(\tau)),(\hat{\vartheta}_n^{*j}))$とすると，富の名目価値$\tilde{W}_t$は次式で表現される．

$$\tilde{W}_t=\vartheta_t\tilde{P}_t+\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{J}\vartheta_t^{*j}\tilde{S}_t^{*j}+\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\vartheta}_{nt}(\tau)\tilde{P}_{nt}(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\hat{\vartheta}_{nt}^{*j}\tilde{S}_{nt}^{*j}-\int_0^t c_s ds. \tag{8.25}$$

このとき，配当込み主要指数のポートフォリオは，

$$\vartheta_t^j=\frac{\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^j}\vartheta_t^{*j},\qquad \hat{\vartheta}_t^{nj}=\frac{\tilde{S}_{nt}^{*j}}{\tilde{S}_t^{nj}}\vartheta_{nt}^{*j}, \tag{8.26}$$

で定義され，配当込み主要指数の名目収益率と主要指数の名目収益率の間に，

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}=\frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}}+\tilde{D}_t^j dt,\qquad \frac{d\tilde{S}_{nt}^j}{\tilde{S}_{nt}^j}=\frac{d\tilde{S}_{nt}^{*j}}{\tilde{S}_{nt}^{*j}}+\tilde{D}_{nt}^j dt, \tag{8.27}$$

が成り立っていることに注意すると，所与のc_tの下，自己資金充足的ポートフォリオ$(\vartheta,(\vartheta(\tau)),(\vartheta^{*j}),(\hat{\vartheta}_n(\tau)),(\hat{\vartheta}_n^{*j}))$は，次式を満たしている．

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t} &= \frac{1}{\tilde{W}_t}\left\{\vartheta_t d\tilde{P}_t+\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)d\tilde{P}_t(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{J}\vartheta_t^{*j}\left(d\tilde{S}_t^{*j}+\tilde{D}_t^j\tilde{S}_t^{*j}dt\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\vartheta}_{nt}(\tau)d\tilde{P}_{nt}(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\vartheta_{nt}^{*j}\left(d\tilde{S}_{nt}^{*j}+\tilde{D}_{nt}^j\tilde{S}_{nt}^{*j}dt\right)-\frac{p_t}{\tilde{W}_t}c_t dt\right\}\\
&= \frac{\vartheta_t\tilde{P}_t}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t}+\int_0^{\bar{\tau}}\frac{\vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\frac{\vartheta_t^j\tilde{S}_t^j}{\tilde{W}_t}\left(\frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}}+\tilde{D}_t^j dt\right)\\
&\quad+\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\frac{\hat{\vartheta}_{nt}(\tau)\tilde{P}_{nt}(\tau)}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_{nt}(\tau)}{\tilde{P}_{nt}(\tau)}d\tau+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\frac{\vartheta_{nt}^j\tilde{S}_{nt}^j}{\tilde{W}_t}\left(\frac{d\tilde{S}_{nt}^{*j}}{\tilde{S}_{nt}^{*j}}+\tilde{D}_{nt}^j dt\right)-\frac{c_t}{W_t}dt\right\}\\
&= \left(1-\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j-\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\varphi}_{nt}(\tau)d\tau-\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\hat{\Phi}_{nt}^j\right)\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t}\\
&\quad+\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}+\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\varphi}_{nt}(\tau)\frac{d\tilde{P}_{nt}(\tau)}{\tilde{P}_{nt}(\tau)}d\tau+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\hat{\Phi}_{nt}^j\frac{d\tilde{S}_{nt}^j}{\tilde{S}_{nt}^j}-\frac{c_t}{W_t}dt.
\end{aligned}$$

このとき，各証券の名目収益率の項に，

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}=\frac{dS_t^j}{S_t^j}+\frac{dp_t}{p_t}+\left(\frac{dS_t^j}{S_t^j}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right),$$

等を代入し整理すると，次式が導かれる．

$$\begin{aligned}
\frac{dW_t}{W_t} &= \frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t} - \frac{dp_t}{p_t} - \left(\frac{dW_t}{W_t}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right) \\
&= \left(1 - \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{J} \varPhi_t^j - \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\hat{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau)d\tau - \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\varPhi}_{nt}^j\right) \frac{dP_t}{P_t} \\
&+ \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} d\tau + \sum_{j=1}^{J} \varPhi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} + \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\hat{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau) \frac{d\hat{P}_{nt}(\tau)}{\hat{P}_{nt}(\tau)} d\tau + \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\varPhi}_{nt}^j \frac{d\hat{S}_{nt}^j}{\hat{S}_{nt}^j} - \frac{c_t}{W_t} dt.
\end{aligned}$$

上式に，(8.9)(8.10)(8.12)(8.15)(8.17) 式を代入し，整理すると，(8.24) 式を得る． □

予算制約式 (8.24) は，富過程が $u_t = (c_t, \varPsi_t)$ で決定されることを示しており，消費者の効用最大化問題における制御過程は $u_t = (c_t, \varPsi_t)$ であることが分かる．状態過程を $\mathbb{X}_t = (W_t, X_t', Y_t')'$ と表記する．また，予算制約式 (8.24) を満たす制御過程 $u_t = (c_t, \varPsi_t)$ を初期状態 $\mathbb{X}_0 = (W_0, X_0', Y_0')'$ に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を $\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)$ と表記する．

9.　CRRA 効用消費者の有限時間国際証券投資問題

本章では，CRRA 効用消費者の有限時間国際証券投資問題を考察する．[18]

9.1.　最適消費・投資問題と状態過程の偏微分方程式

有限時間消費・投資問題の最適化を企図する消費者は CRRA 効用を有すると仮定し，仮定 3.1 を置く．このとき，間接効用関数 J が次式で定義される．

$$J(t,\mathbb{X}_t^u)=\mathrm{E}_t\left[\int_t^T\alpha\,e^{-\beta t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}dt+(1-\alpha)\,e^{-\beta T}\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right],\qquad\forall t\in[0,T].\tag{9.1}$$

従って，消費と投資の最適化問題と価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0)=\sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}J(0,\mathbb{X}_0).\tag{9.2}$$

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}\left\{J_t(t,\mathbb{X}_t^u)+\mu_t'J_{\mathbb{X}}(t,\mathbb{X}_t^u)+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_t\Sigma_t'J_{\mathbb{X}\mathbb{X}}(t,\mathbb{X}_t^u)\right]+\alpha e^{-\beta t}\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right\}=0\tag{9.3}$$

$$\text{s.t.}\quad J(T,\mathbb{X}_T^u)=(1-\alpha)\,e^{-\beta T}\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

ここで，

$$\mu_t=\begin{pmatrix}\mu_W\\ \mu_X\\ \mu_Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W_t(r_t+\Psi_t'\Lambda_t)-c_t\\ K_X(\theta_X-X_t)\\ K_Y(\theta_Y-Y_t)\end{pmatrix},\qquad\Sigma_t=\begin{pmatrix}W_t(\Psi_t^X)' & W_t(\Psi_t^Y)'\\ \Sigma_X & 0\\ 0 & \Sigma_Y\end{pmatrix}.$$

HJB 方程式における最大化の必要条件から最適制御過程 $u^*=(c^*,\Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^*=\alpha^{\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{\beta}{\gamma}t}J_W^{-\frac{1}{\gamma}},\tag{9.4}$$

$$\Psi_t^*=\frac{\pi_t}{W_t^{*2}J_{WW}},\tag{9.5}$$

ここで，

$$\pi_t=-W_t^*\left\{J_W\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Sigma_X'J_{XW}\\ \Sigma_Y'J_{YW}\end{pmatrix}\right\}.\tag{9.6}$$

HJB 方程式における消費関連項については，最適消費の必要条件から，

$$-c_t^*J_W+\alpha e^{-\beta t}\frac{c_t^{*1-\gamma}}{1-\gamma}=\frac{c_t^*}{1-\gamma}\left\{(\gamma-1)J_W+\alpha e^{-\beta t}c_t^{*-\gamma}\right\}=\frac{\gamma}{1-\gamma}c_t^*J_W,\tag{9.7}$$

を得る．同投資関連項については，最適投資の必要条件から，

$$W_t^*J_W\Lambda_t'\Psi_t^*+W_t^*(\Psi_t^{X*})'\Sigma_X'J_{XW}+W_t^*(\Psi_t^{Y*})'\Sigma_Y'J_{YW}=-W_t^{*2}J_{WW}(\Psi_t^*)'\Psi_t^*,\tag{9.8}$$

[18] 本章は，バトボルド他 [11] の研究成果である．

が成立していることに注意すると，

$$W_t^* J_W (\Psi_t^*)' \Lambda_t + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^{X*})' & W_t^*(\Psi_t^{Y*})' \\ \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^{X*})' & W_t^*(\Psi_t^{Y*})' \\ \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW} & J_{WX} & J_{WY} \\ J_{XW} & J_{XX} & J_{XY} \\ J_{YW} & J_{YX} & J_{YY} \end{pmatrix}\right]$$

$$= W_t^* J_W (\Psi_t^*)' \Lambda_t$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t^{*2}\Big((\Psi_t^{X*})'\Psi_t^{X*} + (\Psi_t^{Y*})'\Psi_t^{Y*}\Big) & W_t^*(\Psi_t^{X*})'\Sigma_X' & W_t^*(\Psi_t^{Y*})'\Sigma_Y' \\ W_t^*\Sigma_X\Psi_t^{X*} & \Sigma_X\Sigma_X' & 0 \\ W_t^*\Sigma_Y\Psi_t^{Y*} & 0 & \Sigma_Y\Sigma_Y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{WW} & J_{WX} & J_{WY} \\ J_{XW} & J_{XX} & J_{XY} \\ J_{YW} & J_{YX} & J_{YY} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X' J_{XX} + \Sigma_Y\Sigma_Y' J_{YY}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}J_{WW}}, \quad (9.9)$$

が得られる．

よって，最適消費 (9.4) 式と最適投資 (9.5) 式を HJB 方程式 (9.3) に代入し，(9.7)(9.9) 両式を用いて整理すると，次の間接効用関数 J に関する偏微分方程式が得られる．

$$J_t + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X' J_{XX} + \Sigma_Y\Sigma_Y' J_{YY}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}J_{WW}} + r_t W_t^* J_W + \{K_X(\theta_X - X_t)\}' J_X + \{K_Y(\theta_Y - Y_t)\}' J_Y + \frac{\gamma}{1-\gamma} c_t^* J_W = 0. \quad (9.10)$$

上記偏微分方程式から間接効用関数 J は未知関数 $G(t, X_t, Y_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$J(t, \mathbb{X}_t) = e^{-\beta t}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(t, X_t, Y_t)\big)^{\gamma}. \quad (9.11)$$

従って，HJB 方程式左辺の最大化の十分条件が満たされることは，次式で表される Hessian $\mathbf{H}$ が任意の制御変数 $(c, \Psi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{\bar{N}}$ に対し負定符号であることで確認できる．

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma e^{-\beta t}c^{-\gamma-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma e^{-\beta t}W_t^{1-\gamma}G^{\gamma} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma e^{-\beta t}W_t^{1-\gamma}G^{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

間接効用関数 J を偏微分し，(9.4)(9.5) 式に代入して，偏微分結果とともに偏微分方程式 (9.10) に代入すると，次の命題を得る．

命題 9.1. 仮定 *8.1*，*8.2*，*3.1* の下，本問題 *(9.2)* の間接効用関数，最適消費，最適投資は，それぞれ *(9.11)* 式，*(9.13)* 式，*(9.14)* 式で表される．間接効用関数を構成する関数 $G(t, X_t, Y_t)$ は偏微分方程式 *(9.15)* の解である．

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}, \quad (9.13)$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_X' \frac{G_X}{G} \\ \Sigma_Y' \frac{G_Y}{G} \end{pmatrix}, \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t, X_t, Y_t) + \mathcal{L}G(t, X_t, Y_t) + \alpha^{\frac{1}{\gamma}} = 0,$$
$$G(T, X_T, Y_T) = (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (9.15)$$

ここで，$\mathcal{L}$ は次式で定義される線形微分作用素である．

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}G = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X' G_{XX} + \Sigma_Y\Sigma_Y' G_{YY}\right]\\
&+\left(K_X(\theta_X - X) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X(\lambda_X + \Lambda_X X)\right)' G_X + \left(K_Y(\theta_Y - Y) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y(\lambda_Y + \Lambda_Y Y)\right)' G_Y\\
&-\left\{\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Big((\lambda_X + \Lambda_X X)'(\lambda_X + \Lambda_X X) + (\lambda_Y + \Lambda_Y Y)'(\lambda_Y + \Lambda_Y Y)\Big) + \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r'X) + \frac{\beta}{\gamma}\right\} G.
\end{aligned} \tag{9.16}$$

証明．まず，最適消費は，

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} J_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t}\left\{e^{-\beta t}(W_t^*)^{-\gamma} G^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G},$$

すなわち，(9.13) 式が得られる．

次に，間接効用関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$J_t = -\beta J, \qquad W_t J_W = (1-\gamma)J, \qquad J_X = \gamma\, J\frac{G_X}{G}, \qquad J_Y = \gamma\, J\frac{G_Y}{G},$$

$$W_t^2 J_{WW} = -\gamma(1-\gamma)J, \qquad W_t J_{XW} = \gamma(1-\gamma)J\frac{G_X}{G}, \qquad W_t J_{YW} = \gamma(1-\gamma)J\frac{G_Y}{G},$$

$$J_{XX} = \gamma\, J\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}, \qquad J_{YY} = \gamma\, J\left\{(\gamma-1)\frac{G_Y}{G}\frac{G_Y'}{G} + \frac{G_{YY}}{G}\right\}.$$

間接効用関数の偏微分結果より，最適投資 (9.5) 式右辺の分子，分母は次のように表される．

$$\pi_t = J\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix} + \gamma(\gamma-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right), \tag{9.17}$$

$$W_t^2 J_{WW} = \gamma(\gamma-1)J. \tag{9.18}$$

ゆえに，最適投資 (9.14) 式に (9.17)(9.18) 式を代入すると，(9.14) 式を得る．

間接効用関数 J の偏微分方程式 (9.10) における第 2・3 項は，(9.17)(9.18) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big[\Sigma_X\Sigma_X' J_{XX} + \Sigma_Y\Sigma_Y' J_{YY}\big] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^2 J_{WW}}\\
&\quad= \frac{\gamma}{2}\, J\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\} + \Sigma_Y\Sigma_Y'\left\{(\gamma-1)\frac{G_Y}{G}\frac{G_Y'}{G} + \frac{G_{YY}}{G}\right\}\right]\\
&-\frac{1}{2\gamma(\gamma-1)}J\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix} + \gamma(\gamma-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right)'\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix} + \gamma(\gamma-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right)\\
&\quad= J\left\{\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_{XX}}{G} + \Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_{YY}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\Big((\Lambda_t^X)'\Lambda_t^X + (\Lambda_t^Y)'\Lambda_t^Y)\Big)\right.\\
&\qquad\qquad - (\gamma-1)\left((\Lambda_t^X)'\Sigma_X'\frac{G_X}{G} + (\Lambda_t^Y)'\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right)
\end{aligned}$$

$$
= \gamma J\Bigg\{\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_{XX}}{G} + \Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_{YY}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Big((\Lambda_t^X)'\Lambda_t^X + (\Lambda_t^Y)'\Lambda_t^Y\Big)
$$

$$
- \frac{\gamma-1}{\gamma}\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\Sigma_X' & 0\\ 0 & \Sigma_Y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{G_X}{G}\\ \frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\Bigg\}. \quad (9.19)
$$

間接効用関数の偏微分方程式 (9.10) における第 7 項は，(9.4) 式を代入し整理すると，

$$
\frac{\gamma}{1-\gamma}c_t^* J_W = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}\gamma\frac{J}{W_t^*} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\gamma\frac{J}{G}, \quad (9.20)
$$

を得る．

(9.19)(9.20) 式等を間接効用関数の偏微分方程式 (9.10) に代入し，両辺に G を乗じ，γJ で除して整理すると，(9.15) 式が得られる． □

9.2. 準解析解の導出

偏微分方程式 (9.15) は非斉次項 $\alpha^{\frac{1}{\gamma}}$ を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．Liu [29] は，同非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式 (9.21) の初期値問題の解析解を利用した準解析解構成法を提示しているので，我々も同構成法により準解析解を導出する．

$$
\frac{\partial}{\partial\tau}g(\tau,X,Y) = \mathcal{L}g(\tau,X,Y),
$$

$$
g(0,X,Y) = 1, \quad (9.21)
$$

ここで，$\tau = T - t$ である．

偏微分方程式 (9.21) の解析解は次式で表される．

$$
g(\tau,Z) = \exp\left(a_0(\tau) + a(\tau)'Z + \frac{1}{2}Z'A(\tau)Z\right), \quad (9.22)
$$

ここで，

$$
Z = \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, \qquad a(\tau) = \begin{pmatrix}a_X(\tau)\\ a_Y(\tau)\end{pmatrix}, \qquad A(\tau) = \begin{pmatrix}A_X(\tau) & A_{XY}(\tau)\\ A_{XY}'(\tau) & A_Y(\tau)\end{pmatrix}, \quad (9.23)
$$

であり，$A_X(\tau)$，$A_Y(\tau)$ は対称行列である．係数体系 $(a_0(\tau), a(\tau), A(\tau))$ は (9.22) 式を (9.21) 式に代入した後に現れる $Z = (X', Y')'$ に関する恒等式 (9.25) から導かれる常微分方程式 (9.27)-(9.29) の解となる．

このとき，微分作用素 $\mathcal{L}$ の線形性により，偏微分方程式 (9.15) の準解析解が次式で表現されることを確認できる．

$$
G(t,Z) = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^{T-t} g(s,Z)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(T-t,Z). \quad (9.24)
$$

関数 g（(9.22) 式）に偏微分を施し，偏微分方程式 (9.21) に代入すると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{da_0}{d\tau} + Z'\frac{da}{d\tau} + \frac{1}{2}Z'\frac{dA}{d\tau}Z \\
&\quad = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big[\Sigma_X\Sigma_X'\Big(a_Xa_X' + A_X + a_XX'A_X + A_XXa_X' + a_XY'A_{XY} + A_{XY}Ya_X' \\
&\qquad\qquad + A_XXX'A_X + A_XXY'A_{XY} + A_{XY}YX'A_X + A_{XY}YY'A_{XY}'\Big)\Big] \\
&\qquad + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big[\Sigma_Y\Sigma_Y'\Big(a_Ya_Y' + A_Y + a_YX'A_{XY} + A_{XY}'Xa_Y' + a_YY'A_Y + A_YYa_Y' \\
&\qquad\qquad A_{XY}'XX'A_{XY} + A_{XY}'XY'A_Y + A_YYX'A_{XY} + A_YYY'A_Y\Big)\Big] \\
&\quad + \left\{K_X\theta_X - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X\lambda_X - \left(K_X + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X\Lambda_X\right)X\right\}'(a_X + A_XX + A_{XY}Y) \\
&\quad + \left\{K_Y\theta_Y - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y\lambda_Y - \left(K_Y + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y\Lambda_Y\right)Y\right\}'(a_Y + A_{XY}'X + A_YY) \\
&\quad - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Big(\lambda_X'\lambda_X + 2\lambda_X'\Lambda_XX + X'\Lambda_X'\Lambda_XX + \lambda_Y'\lambda_Y + 2\lambda_Y'\Lambda_YY + Y'\Lambda_Y'\Lambda_YY\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r'X) - \frac{\beta}{\gamma}. \qquad (9.25)
\end{aligned}
$$

次の記法を用いる．

$$
\hat\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_X \\ \lambda_Y \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_X & 0 \\ 0 & \Lambda_Y \end{pmatrix},
$$

$$
\hat K = \begin{pmatrix} K_X + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X\Lambda_X & 0 \\ 0 & K_Y + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y\Lambda_Y \end{pmatrix}, \qquad \hat k = \begin{pmatrix} K_X\theta_X - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X\lambda_X \\ K_Y\theta_Y - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y\lambda_Y \end{pmatrix}.
$$

このとき，$Z'\hat K'AZ = Z'A\hat K'Z$ に注意すると，(9.25) 式は次のように整理できる．

$$
\begin{aligned}
\frac{da_0}{d\tau} + Z'\frac{da}{d\tau} + \frac{1}{2}Z'\frac{dA}{d\tau}Z &= \frac{1}{2}\Big(a'\hat\Sigma\hat\Sigma'a + \mathrm{tr}\Big[\hat\Sigma\hat\Sigma'A\Big]\Big) + Z'A\hat\Sigma\hat\Sigma'a + \frac{1}{2}Z'A\hat\Sigma\hat\Sigma'AZ \\
&\quad + \hat k a - Z'\hat K'a - \frac{1}{2}Z'\hat K'AZ - \frac{1}{2}Z'A\hat KZ + \hat k'AZ \\
&\quad - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}Z'\Lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}Z'\Lambda'\Lambda Z - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma}Z'\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\beta}{\gamma}. \qquad (9.26)
\end{aligned}
$$

上式は変数 $Z = (X, Y)$ に関する恒等式なので，次の (a_0, a, A) に関する常微分方程式が導出される．

$$
\frac{da_0}{d\tau} = \frac{1}{2}\Big(a'\hat\Sigma\hat\Sigma'\,a + \mathrm{tr}\,\Big[\hat\Sigma\hat\Sigma'A\Big]\Big) + \hat k'a - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 + \frac{\beta}{\gamma}\right), \quad a(0) = 0, \qquad (9.27)
$$

$$
\frac{da}{d\tau} = \big(A\hat\Sigma\hat\Sigma' - \hat K\big)a + A\hat k - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a(0) = 0, \qquad (9.28)
$$

$$
\frac{dA}{d\tau} = A\hat\Sigma\hat\Sigma'A - \hat K'A - A\hat K - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0) = 0. \qquad (9.29)
$$

次の記法を用いる．

$$
\begin{aligned}
a^*(t,Z_t) &= \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)a(s)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)a(\tau)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)},\\
A^*(t,Z_t) &= \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)A(s)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)A(\tau)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)}.
\end{aligned}
$$

このとき，次の命題を得る．

命題 9.2. 仮定 *8.1*，*8.2*，*3.1* の下，本問題 *(9.2)* の最適消費及び最適投資は次を満たしている．

$$
c_t^* = \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}W_t^*}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)\,ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)}, \tag{9.30}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_t^* &= \frac{1}{\gamma}\big(\lambda+\Lambda Z_t\big) + \Big\{\hat{\Sigma}'\Big(a^*(t,Z_t)+A^*(t,Z_t)Z_t\Big)\Big\}\\
&= \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}\lambda_X+\Lambda_X X_t\\ \lambda_Y+\Lambda_Y Y_t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Sigma_X'\Big(a_X^*(t,Z_t)+A_X^*(t,Z_t)X_t+A_{XY}^*(t,Z_t)Y_t\Big)\\ \Sigma_Y'\Big(a_Y^*(t,Z_t)+A_{XY}^*(t,Z_t)'X_t+A_Y^*(t,Z_t)Y_t\Big)\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{9.31}
$$

ここで，(a_0,a,A) は *(9.32)-(9.34)* 式で表され，A は対称行列である．

$$
a_0(\tau) = \int_0^\tau\left\{\frac{1}{2}\Big(a(s)'\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'a(s)+\mathrm{tr}[\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'A(s)]\Big)+\hat{k}'a(s)-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda+\frac{\gamma-1}{\gamma}r_0+\frac{\beta}{\gamma}\right)\right\}ds, \tag{9.32}
$$

$$
\begin{aligned}
a(\tau) &= \exp\left(\int_0^\tau\Big(A(s)\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'-\hat{K}\Big)ds\right)\\
&\quad\times\int_0^\tau\left(A(s)\hat{k}-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda-\frac{\gamma-1}{\gamma}\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}\right)e^{-\int_0^s\left(A(s)\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'-\hat{K}\right)dt}ds,
\end{aligned}
\tag{9.33}
$$

$$
A(\tau) = C_2(\tau)C_1^{-1}(\tau), \tag{9.34}
$$

ここで，

$$
\begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix} = \exp\left(\tau\begin{pmatrix}\hat{K} & -\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'\\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\hat{K}'\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}I_{\bar{N}}\\ 0_{\bar{N}}\end{pmatrix}. \tag{9.35}
$$

証明. $a_0(\tau)$，$a(\tau)$ がそれぞれ (9.32) 式，(9.33) 式で表されることは容易に確認できるので，$A(\tau)$ が (9.34) 式で表されることを有本 [3] 定理 5.2 に沿って証明する．$\bar{N}\times\bar{N}$ の行列 $C_1(\tau)$，$C_2(\tau)$ に関する線形微分方程式の初期値問題を考察する．

$$
\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{K} & -\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'\\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\hat{K}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_{\bar{N}}\\ 0_{\bar{N}}\end{pmatrix}. \tag{9.36}
$$

線形微分方程式 (9.36) の解は (9.35) 式で表される．$C_1(\tau)$ は正則であることが証明できる [19] ので，$A(\tau)$ を (9.34) 式で定義する．このとき，

$$
\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) = -C_1^{-1}(\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}C_1(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) \tag{9.37}
$$

[19] 有本 [3] 定理 5.2 の証明を参照せよ．

となることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}A(\tau) &= \left\{\frac{d}{d\tau}C_2(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) + C_2(\tau)\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) \\
&= \left(-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda C_1(\tau) - \hat{K}'C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) - A(\tau)\left(\hat{K}C_1(\tau) - \Sigma\Sigma'C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) \\
&= A(\tau)\Sigma\Sigma'A(\tau) - \hat{K}'A(\tau) - A(\tau)\hat{K} - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda,
\end{aligned}
$$

となり，$A(\tau)$ が Riccati 方程式 (9.29) を満たしていることを確認できる．$A(\tau)$ の一意性は，有本 [3] 定理 5.2 の証明を参照せよ．最後に，$A(\tau)$ の対称性は，Riccati 方程式及び初期値 (9.29) の転値をとったとき，$A(\tau)'$ に関して同一の式が得られるので，解の一意性から $A(\tau)' = A(\tau)$ でなければばならないことによる． □

10.　相似拡大的頑健効用消費者の無限時間国際証券投資問題

本章では，ナイトの不確実性下，曖昧性回避的な相似拡大的頑健効用消費者の無限時間国際証券投資問題を考察する．[20]

10.1.　国際証券投資頑健最適化問題と状態過程の偏微分方程式

10.1.1.　相似拡大的頑健効用消費者の最適化問題

無限時間消費・投資問題の最適化を企図する消費者は相似拡大的頑健効用を有すると仮定し，仮定 6.1 を置く．このとき，候補確率 P^ξ の下での間接効用汎関数 J^ξ が次式で再帰的に定義される．

$$J^\xi(\mathbb{X}_t) = \mathrm{E}_t^\xi \left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)} \left\{ \frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J^\xi(\mathbb{X}_s)}{2\delta} \xi_s' \xi_s \right\} ds \right]. \tag{10.1}$$

このとき，本稿における消費と投資の最適化問題及び価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \inf_{\mathrm{P}^\xi} J^\xi(\mathbb{X}_0). \tag{10.2}$$

10.1.2.　最悪確率の決定

最悪確率候補としての等価確率測度 P^ξ の下での標準ブラウン運動 B^ξ は,

$$B_t^\xi = B_t - \int_0^t \xi_s \, ds,$$

と表されるので，等価確率測度 P^ξ の下での状態変数に関する確率微分方程式は次のように書き改められる．

$$d\mathbb{X}_t = (\mu_t + \Sigma_t \xi_t)\, dt + \Sigma_t \, dB_t^\xi, \tag{10.3}$$

ここで,

$$\mu_t = \begin{pmatrix} \mu_W \\ \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t(r_t + \Psi_t' \Lambda_t) - c_t \\ K_X(\theta_X - X_t) \\ K_Y(\theta_Y - Y_t) \end{pmatrix}, \quad \Sigma_t = \begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^X)' & W_t(\Psi_t^Y)' \\ \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix}.$$

従って，HJB 方程式は次式のように表される．

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} \left\{ \mu_t' J_{\mathbb{X}}^\xi + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\Sigma_t \Sigma_t' J_{\mathbb{X}\mathbb{X}}^\xi \right] - \beta J^\xi + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J^\xi}{2\delta} \xi_t' \xi_t + (\Sigma_t \xi_t)' J_{\mathbb{X}}^\xi \right\} = 0, \tag{10.4}$$

$$\text{s.t.} \quad \lim_{T \to \infty} \mathrm{E}[e^{-\beta T} J^{\xi^*}(\mathbb{X}_T)] = 0.$$

HJB 方程式 (10.4) における ξ に関する最小化条件より，最悪確率測度 P^{ξ^*} が次のように求められる．

$$\xi_t^* = -\frac{\delta}{(1-\gamma)J^{\xi^*}} \Sigma_t' J_{\mathbb{X}}^{\xi^*}. \tag{10.5}$$

最悪確率測度 P^{ξ^*} の下での間接効用関数を改めて J と表記し，P^{ξ^*} を HJB 方程式 (10.4) に代入すると，次式を得る．

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \left[\mu_t' J_{\mathbb{X}} + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\Sigma_t \Sigma_t' J_{\mathbb{X}\mathbb{X}} \right] - \beta J + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)J} J_{\mathbb{X}}' \Sigma_t \Sigma_t' J_{\mathbb{X}} \right] = 0 \tag{10.6}$$

[20] 本章は，バトボルド他 [10] の研究成果である．

10.1.3. 最悪確率下の効用最大化

HJB 方程式における最大化の必要条件から最適制御 $u^* = (c^*, \Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$
\begin{aligned}
c_t^* &= V_W^{-\frac{1}{\gamma}}, && (10.7)\\
\Psi_t^* &= \frac{\pi_t}{W_t^{*2}\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}, && (10.8)
\end{aligned}
$$

ここで，W_t^* は最適制御 u^* により達成される富過程であり

$$
\pi_t = W_t^* \left\{ -V_W \begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_X' & 0 \\ 0 & \Sigma_Y' \end{pmatrix} \left(\frac{\delta V_W}{(1-\gamma)V} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_{XW} \\ V_{YW} \end{pmatrix} \right) \right\}. \quad (10.9)
$$

最適消費 (10.7) 式と最適投資 (10.8) 式を HJB 方程式 (10.6) に代入して整理すると，次の価値関数 V に関する偏微分方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma_X \Sigma_X' V_{XX} + \Sigma_Y \Sigma_Y' V_{YY}\right] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\left(V_X' \Sigma_X \Sigma_X' V_X + V_Y' \Sigma_Y \Sigma_Y' V_Y\right) \\
&- \frac{\pi_t' \pi_t}{2W_t^{*2}\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)} + W_t^* r_t V_W + \mu_X' V_X + \mu_Y' V_Y + \frac{\gamma}{1-\gamma} V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \beta V = 0. \quad (10.10)
\end{aligned}
$$

上記偏微分方程式から価値関数 $V(\mathbb{X}_t)$ は未知関数 $G(X_t, Y_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$
V(\mathbb{X}_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(X_t, Y_t)\big)^{\gamma}. \quad (10.11)
$$

(10.11) 式に偏微分を施し，偏微分方程式 (10.10) に代入すると，次の命題を得る．

命題 10.1. 仮定 *8.1*，*8.2*，*6.1* の下，本問題 *(10.2)* の最適消費は *(10.12)* 式を，最適投資は *(10.13)* 式をそれぞれ満たしており，間接効用関数 J を構成する未知関数 $G(X_t, Y_t)$ は偏微分方程式 *(10.14)* の解である．

$$
\begin{aligned}
c_t^* &= \frac{W_t}{G(X_t, Y_t)}, && (10.12)\\
\Psi_t^* &= \frac{1}{\gamma+\delta}\begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix} + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\begin{pmatrix} \Sigma_X' \frac{G_X}{G} \\ \Sigma_Y' \frac{G_Y}{G} \end{pmatrix}, && (10.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma_X \Sigma_X' \frac{G_{XX}}{G} + \Sigma_Y \Sigma_Y' \frac{G_{YY}}{G}\right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\frac{G_X'}{G}\Sigma_X \Sigma_X' \frac{G_X}{G} + \frac{G_Y'}{G}\Sigma_Y \Sigma_Y' \frac{G_Y}{G}\right) \\
&\qquad + \left\{\begin{pmatrix} \mu_X' & \mu_Y' \end{pmatrix} + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_t' \begin{pmatrix} \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \frac{G_X}{G} \\ \frac{G_Y}{G} \end{pmatrix} + \frac{1}{G} \\
&\qquad\qquad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_t' \Lambda_t + \frac{\gamma-1}{\gamma} r_t + \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0. \quad (10.14)
\end{aligned}
$$

証明. まず，最適消費は，

$$
c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \left\{\left(\frac{G}{W_t^*}\right)^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t^*}{G},
$$

すなわち，(10.12) 式が得られる．

次に，間接効用関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$W_t V_W = (1-\gamma)V, \qquad V_X = \gamma\, V\frac{G_X}{G}, \qquad V_Y = \gamma\, V\frac{G_Y}{G},$$

$$W_t^2 V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V, \qquad W_t V_{XW} = \gamma(1-\gamma)V\frac{G_X}{G}, \qquad W_t V_{YW} = \gamma(1-\gamma)V\frac{G_Y}{G},$$

$$V_{XX} = \gamma\, V\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}, \qquad V_{YY} = \gamma\, V\left\{(\gamma-1)\frac{G_Y}{G}\frac{G_Y'}{G} + \frac{G_{YY}}{G}\right\}.$$

$$V_{XX} = \gamma\, V\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}, \qquad V_{YY} = \gamma\, V\left\{(\gamma-1)\frac{G_Y}{G}\frac{G_Y'}{G} + \frac{G_{YY}}{G}\right\}.$$

価値関数の偏微分結果より，最適投資 (10.8) 式右辺の分子，分母は，それぞれ次のように表される．

$$\pi_t = V\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix} + \gamma(\gamma+\delta-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right), \tag{10.15}$$

$$W_t^{*2}\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right) = (\gamma-1)(\gamma+\delta)V. \tag{10.16}$$

ゆえに，最適投資 (10.8) 式に (10.15)(10.16) 式を代入すると，(10.13) 式を得る．

価値関数 V の偏微分方程式 (10.10) における第 1 項〜第 3 項は，(10.15)(10.16) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big[\Sigma_X\Sigma_X' V_{XX} + \Sigma_Y\Sigma_Y' V_{YY}\big] \\
&\qquad - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\big(V_X'\Sigma_X\Sigma_X'V_X + V_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y'V_Y\big) - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)} \\
&= \frac{\gamma}{2}V\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\} + \Sigma_Y\Sigma_Y'\left\{(\gamma-1)\frac{G_Y}{G}\frac{G_Y'}{G} + \frac{G_{YY}}{G}\right\}\right] \\
&\qquad + \frac{\gamma^2\delta}{2(\gamma-1)}V\left(\frac{G_X'}{G}\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_X}{G} + \frac{G_Y'}{G}\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right) - \frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}V \\
&\times\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix} + \gamma(\gamma+\delta-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right)'\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix} + \gamma(\gamma+\delta-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right) \\
&= V\Bigg\{\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_{XX}}{G} + \Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_{YY}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t \\
&\qquad - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\left((\Lambda_t^X)'\Sigma_X'\frac{G_X}{G} + (\Lambda_t^Y)'\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right) \\
&\qquad + \frac{\gamma}{2}\left(\gamma-1+\frac{\gamma\delta}{\gamma-1} - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\right)\left(\frac{G_X'}{G}\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_X}{G} + \frac{G_Y'}{G}\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right)\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma V \Biggl\{ \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\Sigma_X \Sigma_X' \frac{G_{XX}}{G} + \Sigma_Y \Sigma_Y' \frac{G_{YY}}{G} \right] - \frac{\gamma - 1}{2\gamma(\gamma+\delta)} \Lambda_t' \Lambda_t \\
&\qquad\qquad - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta} \begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Sigma_X' & 0 \\ 0 & \Sigma_Y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{G_X}{G} \\ \frac{G_Y}{G} \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \left(\frac{G_X'}{G} \Sigma_X \Sigma_X' \frac{G_X}{G} + \frac{G_Y'}{G} \Sigma_Y \Sigma_Y' \frac{G_Y}{G} \right) \Biggr\}. \qquad (10.17)
\end{aligned}
$$

間接効用関数の偏微分方程式 (10.10) における第 7 項は，(10.7) 式を代入し整理すると，

$$
\frac{\gamma}{1-\gamma} V_W^{1-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{W} \left\{ \left(\frac{G}{W} \right)^{\gamma} \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{G}, \qquad (10.18)
$$

を得る．

(10.17)(10.18) 式等を間接効用関数の偏微分方程式 (10.10) に代入し，両辺を γV で除して整理すると，(10.14) 式が得られる． □

10.2. 対数線形近似法による近似解析解の導出

偏微分方程式 (10.14) の非斉次項 $1/G$ を次式で対数線形近似する．

$$
\frac{1}{G(X_t, Y_T)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t, Y_t),
$$

ここで，g_0 は (4.23) 式，g_1 は (4.24) 式で与えられている．

而して，Λ_t^X，Λ_t^Y，r_t に，それぞれ (8.6) 式，(8.5) 式，(8.7) 式を代入すると，次の近似偏微分方程式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\Sigma_X \Sigma_X' \frac{G_{XX}}{G} + \Sigma_Y \Sigma_Y' \frac{G_{YY}}{G} \right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \left(\frac{G_X'}{G} \Sigma_X \Sigma_X' \frac{G_X}{G} + \frac{G_Y'}{G} \Sigma_Y \Sigma_Y' \frac{G_Y}{G} \right) \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} K_X(\theta_X - X_t) \\ K_Y(\theta_Y - Y_t) \end{pmatrix}' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta} \begin{pmatrix} \Sigma_X'(\lambda_X + \Lambda_X X_t) \\ \Sigma_Y'(\lambda_Y + \Lambda_Y Y_t) \end{pmatrix} \right)' \begin{pmatrix} \frac{G_X}{G} \\ \frac{G_Y}{G} \end{pmatrix} - g_1 \log G \\
&\quad + g_0 - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)} \begin{pmatrix} \lambda_X + \Lambda_X X_t \\ \lambda_Y + \Lambda_Y Y_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \lambda_X + \Lambda_X X_t \\ \lambda_Y + \Lambda_Y Y_t \end{pmatrix} - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r' X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \qquad (10.19)
\end{aligned}
$$

近似偏微分方程式 (10.19) の解は次式で表される 2 次形式の指数関数であることが推測される．

$$
G(X_t, Y_t) = \exp \left(a + a_X' X_t + a_Y' Y_t + \frac{1}{2} X_t' A_X X_t + \frac{1}{2} Y_t' A_Y Y_t + X_t' A_{XY} Y_t \right), \qquad (10.20)
$$

ここで，A_X，A_Y は一般性を失うことなく対称行列である．

このとき，

$$
\begin{aligned}
g_1 &= - \lim_{t\to\infty} \mathrm{E} \left[\log G(X_t, Y_t) \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[-a - a_X \mathrm{E}[X_t] - a_Y \mathrm{E}[Y_t] - \frac{1}{2} \mathrm{E}[X_t' A_X X_t] - \frac{1}{2} \mathrm{E}[Y_t' A_Y Y_t] - \mathrm{E}[X_t' A_{XY} Y_t] \right], \qquad (10.21)
\end{aligned}
$$

は次の補題で計算される．

補題 10.1. 仮定 *8.1*，*8.2*，*6.1* の下，g_1 は (a, a_X, a_Y, A_X, A_Y) により次式で表される．

$$\begin{aligned} g_1 = -a - a_X\theta_X - a_Y\theta_Y - \frac{1}{2}\theta_X' A_X\theta_X - \frac{1}{2}\theta_Y' A_Y\theta_Y - \theta_X' A_{XY}\theta_Y \\ - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\left(Q_X^{-1}\Sigma_X\right)' M^X Q_X^{-1}\Sigma_X + \left(Q_Y^{-1}\Sigma_Y\right)' M^Y Q_Y^{-1}\Sigma_Y\right], \end{aligned} \quad (10.22)$$

ここで，行列 P の第 (i,j) 成分を P_{ij} と表記すると，

$$M_{ij}^X = \frac{1}{l_i + l_j}(Q_X' A_X Q_X)_{ij}, \qquad M_{ij}^Y = \frac{1}{l_i + l_j}(Q_Y' A_Y Q_Y)_{ij}.$$

証明. X_t は線形確率微分方程式 (8.1) の解として，次のように表される．

$$X_t = Q_X e^{-tL_X} Q_X^{-1} X_0 + Q_X\left(I - e^{-tL_X}\right) Q_X^{-1}\theta_X + Q_X \int_0^t e^{-(t-s)L_X} Q_X^{-1}\Sigma_X dB_s$$

よって，$\lim_{t\to\infty} e^{-tL_X} = 0, \qquad \mathrm{E}[dB_s] = 0$ に注意すると，$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[X_t] = \theta_X$ が得られる．
次に，

$$\begin{aligned} X_t' A_X X_t = \left\{Q_X e^{-tL_X} Q_X^{-1} X_0 + Q_X\left(I_N - e^{-tL_X}\right) Q_X^{-1}\theta_X + Q_X \int_0^t e^{-(t-s)L_X} Q_X^{-1}\Sigma_X dB_s\right\}' \times \\ A_X\left\{Q_X e^{-tL_X} Q_X^{-1} X_0 + Q_X\left(I_N - e^{-tL_X}\right) Q_X^{-1}\theta_X + Q_X \int_0^t e^{-(t-s)L_X} Q_X^{-1}\Sigma_X dB_s\right\} \end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{E}[dB_s dB_t'] = \delta_{st} I_N ds$ に注意すると，

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[X_t' A_X X_t] &= \theta_X' A_X\theta_X + \lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{tr}\left[(Q_X^{-1}\Sigma_X)' e^{-(t-s)L_X} Q_X' A_X Q_X e^{-(t-s)L_X} Q_X^{-1}\Sigma_X\right] ds \\ &= \theta_X' A_X\theta_X + \mathrm{tr}\left[(Q_X^{-1}\Sigma_X)' \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-(t-s)L_X} Q_X' A_X Q_X e^{-(t-s)L_X} ds\, Q_X^{-1}\Sigma_X\right] \\ &= \theta_X' A_X\theta_X + \mathrm{tr}\left[(Q_X^{-1}\Sigma_X)' M^X Q_X^{-1}\Sigma_X\right]. \end{aligned}$$

同様にして，

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[Y_t] = \theta_Y,$$
$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[X_t' A_{XY} Y_t] = \theta_X' A_{XY}\theta_Y, \quad \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[Y_t' A_Y Y_t] = \theta_Y' A_Y\theta_Y + \mathrm{tr}\left[(Q_Y^{-1}\Sigma_Y)' M^Y Q_Y^{-1}\Sigma_Y\right].$$

以上より，(10.22) 式が導かれる． □

関数 G に偏微分を施し，偏微分方程式 (10.19) に代入し，g_0 に (4.23) 式を代入すると，次

式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[\Sigma_X\Sigma_X' A_X + \Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\big] + \frac{1}{2}\big(a_X'\Sigma_X\Sigma_X' a_X + a_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' a_Y\big) \\
&\quad + \Big(a_X'\Sigma_X\Sigma_X' A_X + a_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' A_{XY}'\Big)X_t + \Big(a_X'\Sigma_X\Sigma_X' A_{XY} + a_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\Big)Y_t \\
&+ X_t'\bigg(\frac{1}{2}\Big(A_X\Sigma_X\Sigma_X' A_X + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma_Y' A_{XY}'\Big)\bigg)X_t + Y_t'\bigg(\frac{1}{2}\Big(A_{XY}'\Sigma_X\Sigma_X' A_{XY} + A_Y\Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\Big)\bigg)Y_t \\
&\quad + X_t'\bigg(\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(A_X\Sigma_X\Sigma_X' A_{XY} + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\Big)\bigg)Y_t \\
&\quad + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(a_X'\Sigma_X\Sigma_X' a_X + a_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' a_Y\big) \\
&+ \frac{\delta}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big\{\Big(a_X'\Sigma_X\Sigma_X' A_X + a_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' A_{XY}'\Big)X_t + \Big(a_X'\Sigma_X\Sigma_X' A_{XY} + a_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\Big)Y_t\Big\} \\
&+ \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big\{X_t'\Big(A_X\Sigma_X\Sigma_X' A_X + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma_Y' A_{XY}'\Big)X_t + Y_t'\Big(A_{XY}'\Sigma_X\Sigma_X' A_{XY} + A_Y\Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\Big)Y_t\Big\} \\
&\quad \Big\{\Big(\theta_X' K_X' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda_X'\Sigma_X\Big) + X_t'\Big(-K_X' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_X'\Sigma_X\Big)\Big\}\big(a_X + A_X X_t + A_{XY}Y_t\big) \\
&\quad \Big\{\Big(\theta_Y' K_Y' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda_Y'\Sigma_Y\Big) + Y_t'\Big(-K_Y' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_Y'\Sigma_Y\Big)\Big\}\big(a_Y + A_{XY}' X_t + A_Y Y_t\big) \\
&\quad + g_1(1-\log g_1) - g_1\left(a + a_X' X_t + a_Y' Y_t + \frac{1}{2}X_t' A_X X_t + \frac{1}{2}Y_t' A_Y Y_t + X_t' A_{XY} Y_t\right) \\
&\quad - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Big(\lambda_X'\lambda_X + 2\lambda_X'\Lambda_X X_t + X_t'\Lambda_X'\Lambda_X X_t + \lambda_Y'\lambda_Y + 2\lambda_Y'\Lambda_Y Y_t + Y_t'\Lambda_Y'\Lambda_Y Y_t\Big) \\
&\qquad - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r' X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \qquad (10.23)
\end{aligned}
$$

上式は (X_t, Y_t) に関する恒等式なので，次の $(a, a_X, a_Y, A_X, A_Y, A_{XY})$ に関する代数方程式が導出される．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[\Sigma_X\Sigma_X' A_X + \Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\big] + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(a_X'\Sigma_X\Sigma_X' a_X + a_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' a_Y\big) \\
&\quad + \Big(\theta_X' K_X' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda_X'\Sigma_X\Big)a_X + \Big(\theta_Y' K_Y' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda_Y'\Sigma_Y\Big)a_Y + \\
&\quad - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}(\lambda_X'\lambda_X + \lambda_Y'\lambda_Y) - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 - \frac{\beta}{\gamma} + g_1(1 - a - \log g_1) = 0, \qquad (10.24)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A_X'\Sigma_X\Sigma_X' a_X + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma_Y' a_Y\big) \\
&\quad + A_X'\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma_X'\lambda_X + K_X\theta_X\Big) + A_{XY}\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma_Y'\lambda_Y + K_Y\theta_Y\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_X'\Sigma_X - K_X'\Big)a_X - \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_X'\lambda_X - \frac{\gamma-1}{\gamma}r - g_1 a_X = 0, \qquad (10.25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A'_{XY}\Sigma_X\Sigma'_X a_X + A'_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y a_Y\big)\\
&\qquad + A'_{XY}\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma'_X\lambda_X + K_X\theta_X\Big) + A'_Y\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma'_Y\lambda_Y + K_Y\theta_Y\Big)\\
&\qquad\qquad + \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'_Y\Sigma_Y - K'_Y\Big)a_Y - \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'_Y\lambda_Y - g_1 a_Y = 0, \quad (10.26)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A_X\Sigma_X\Sigma'_X A_X + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma'_Y A'_{XY}\big)\\
&\qquad + \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'_X\Sigma_X - K'_X\Big)A_X - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'_X\Lambda_X - \frac{1}{2}g_1 A_X = 0, \quad (10.27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A'_{XY}\Sigma_X\Sigma'_X A_{XY} + A_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y A_Y\big)\\
&\qquad + \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'_Y\Sigma_Y - K'_Y\Big)A_Y - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'_Y\Lambda_Y - \frac{1}{2}g_1 A_Y = 0, \quad (10.28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A_X\Sigma_X\Sigma'_X A_{XY} + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma'_Y A_Y\big)\\
&+ \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'_X\Sigma_X - K'_X\Big)A_{XY} + A_{XY}\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma'_Y\Lambda_Y - K_Y\Big) - g_1 A_{XY} = 0, \quad (10.29)
\end{aligned}
$$

ここで，g_1 は (10.21) 式で表されている．

間接効用関数を構成する未知関数が近似偏微分方程式 (10.19) の解として近似されている場合の間接効用関数，最適消費，最適投資をそれぞれ「近似間接効用関数」,「近似最適消費」,「近似最適投資比率」と呼び，それぞれ $\tilde{J}, \tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*$ と表記する．このとき，次の命題を得る．

命題 10.2. 仮定 *8.1*・*8.2*・*6.1* の下，本問題 *(10.2)* の近似間接効用関数，近似最適消費，近似最適投資比率は次を満たしている．

$$
\begin{aligned}
\tilde{J}(Z^*_t) &= \exp\left[\gamma\left(a + a'_X X_t + a'_Y Y_t + \frac{1}{2}X'_t A_X X_t + \frac{1}{2}Y'_t A_Y Y_t + X'_t A_{XY} Y_t\right)\right]\frac{W_t^{*1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (10.30)\\
\tilde{c}^*_t &= \exp\left[-\left(a + a'_X X_t + a'_Y Y_t + \frac{1}{2}X'_t A_X X_t + \frac{1}{2}Y'_t A_Y Y_t + X'_t A_{XY} Y_t\right)\right]W^*_t, \quad (10.31)\\
\tilde{\Psi}^*_t &= \frac{1}{\gamma+\delta}\begin{pmatrix}\lambda_X + \Lambda_X X_t\\ \lambda_Y + \Lambda_Y Y_t\end{pmatrix} + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\begin{pmatrix}\Sigma'_X\left(a_X + A_X X_t + A_{XY} Y_t\right)\\ \Sigma'_Y\left(a_Y + A'_{XY} X_t + A_Y Y_t\right)\end{pmatrix}, \quad (10.32)
\end{aligned}
$$

ここで，(a, a_X, a_Y, A_X, A_Y) は代数方程式 *(10.24)-(10.29)* の解である．

10.3. 最適投資比率の典型例

標準ブラウン運動が $\bar{N}$ 次元で，非債券の主要指数が国内 J 種類，海外第 n 国 $\hat{J}_n$ 種類なので，物価連動債については，国内 I 群，海外第 n 国 $\hat{I}_n$ 群の投資対象を $\bar{N} = I + J + \sum_{n=1}^{N}(\hat{I}_n + \hat{J}_n)$ を満たすように設定することにより，最適投資を決定できる．本節では，典型的な物価連動

債投資戦略として，物価連動債投資比率密度を対象とする投資戦略，物価連動債投資比率を対象とする投資戦略を取り上げ，各戦略における最適投資比率を示す．

危険証券（非短期安全証券）への投資比率を表す $\bar{N}\times 1$ ベクトル Φ_t 及び危険証券のボラティリティを表す $\bar{N}\times M$ 行列 B を次のように表記する．

$$\Phi_t=\begin{pmatrix}\Phi_t^P\\ \Phi_t^S\\ \hat{\Phi}_{1t}^P\\ \hat{\Phi}_{1t}^S\\ \vdots\\ \hat{\Phi}_{Nt}^P\\ \hat{\Phi}_{Nt}^S\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B^P\\ B^S\\ \hat{B}_1^P\\ \hat{B}_1^S\\ \vdots\\ \hat{B}_N^P\\ \hat{B}_N^S\end{pmatrix}. \tag{10.33}$$

また，次の記法を用いる．

$$\Delta\Lambda_t^X = \begin{pmatrix}0_{M\times(I+J)} & \Delta\Lambda_{1t}^X & \Delta\Lambda_{2t}^X & \cdots & \Delta\Lambda_{Nt}^X\end{pmatrix}, \tag{10.34}$$

$$\Delta\Lambda_t^Y = \begin{pmatrix}0_{N\times(I+J)} & \Delta\Lambda_{1t}^Y & \Delta\Lambda_{2t}^Y & \cdots & \Delta\Lambda_{Nt}^Y\end{pmatrix}, \tag{10.35}$$

ここで，$\Delta\Lambda_{nt}^X$ は $M\times(\hat{I}_n+\hat{J}_n)$ 行列，$\Delta\Lambda_{nt}^Y$ は $N\times(\hat{I}_n+\hat{J}_n)$ 行列で，次のように定義されている．

$$\Delta\Lambda_{nt}^X = \begin{pmatrix}\Lambda_t^X-\hat{\Lambda}_{nt}^X & \Lambda_t^X-\hat{\Lambda}_{nt}^X & \cdots & \Lambda_t^X-\hat{\Lambda}_{nt}^X\end{pmatrix}, \tag{10.36}$$

$$\Delta\Lambda_{nt}^Y = \begin{pmatrix}\Lambda_t^Y-\hat{\Lambda}_{nt}^Y & \Lambda_t^Y-\hat{\Lambda}_{nt}^Y & \cdots & \Lambda_t^Y-\hat{\Lambda}_{nt}^Y\end{pmatrix}. \tag{10.37}$$

10.3.1. 物価連動債投資比率密度を対象とする投資戦略

消費者が物価連動債の満期までの期間を国内 I 群，海外第 n 国 I_n 群に区分し，各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を採用する場合を考察する．説明の便宜上，$(\tau_0,\tau_I)=(0,\bar{\tau})$，$(\hat{\tau}_0^n,\hat{\tau}_{I_n}^n)=(0,\hat{\tau}_n)$ と表記し，物価連動債の満期までの期間を国内 $(\tau_0,\tau_1],(\tau_1,\tau_2],\cdots,(\tau_{I-1},\tau_I]$，海外第 n 国 $(\hat{\tau}_0^n,\hat{\tau}_1^n],(\hat{\tau}_1^n,\hat{\tau}_2^n],\cdots,(\hat{\tau}_{\hat{I}_n-1}^n,\hat{\tau}_{\hat{I}_n}^n]$ に区分する．また，投資比率密度過程を国内 $(\varphi_t^1,\varphi_t^2,\cdots,\varphi_t^I)$，海外第 n 国 $(\hat{\varphi}_{nt}^1,\hat{\varphi}_{nt}^2,\cdots,\hat{\varphi}_{nt}^{\hat{I}_n})$ とする．次の記法を用いる．

$$\Phi_t^P=\begin{pmatrix}\varphi_t^1(\tau_1-\tau_0)\\ \varphi_t^2(\tau_2-\tau_1)\\ \vdots\\ \varphi_t^I(\tau_I-\tau_{I-1})\end{pmatrix},\quad \Phi_t^S=\begin{pmatrix}\Phi_t^1\\ \Phi_t^2\\ \vdots\\ \Phi_t^J\end{pmatrix},\quad \hat{\Phi}_{nt}^P=\begin{pmatrix}\hat{\varphi}_{nt}^1(\hat{\tau}_1^n-\hat{\tau}_0^n)\\ \hat{\varphi}_{nt}^2(\hat{\tau}_2^n-\hat{\tau}_1^n)\\ \vdots\\ \hat{\varphi}_{nt}^{\hat{I}}(\hat{\tau}_{I_n}^n-\hat{\tau}_{I_{n-1}}^n)\end{pmatrix},\quad \hat{\Phi}_{nt}^S=\begin{pmatrix}\hat{\Phi}_{nt}^1\\ \hat{\Phi}_{nt}^2\\ \vdots\\ \hat{\Phi}_{nt}^{\hat{J}_n}\end{pmatrix},$$

$$B^P=\begin{pmatrix}(\tau_1-\tau_0)^{-1}\int_{\tau_0}^{\tau_1}b(\tau)'d\tau\\ (\tau_2-\tau_1)^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}b(\tau)'d\tau\\ \vdots\\ (\tau_I-\tau_{I-1})^{-1}\int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I}b(\tau)'d\tau\end{pmatrix},\quad B^S=\begin{pmatrix}b_1'\\ b_2'\\ \vdots\\ b_J'\end{pmatrix},$$

$$\hat{B}_n^P = \begin{pmatrix} (\hat{\tau}_1^n - \hat{\tau}_0^n)^{-1} \int_{\hat{\tau}_0^n}^{\hat{\tau}_1^n} \hat{b}_n(\tau)' d\tau \\ (\hat{\tau}_2^n - \hat{\tau}_1^n)^{-1} \int_{\hat{\tau}_1^n}^{\hat{\tau}_2^n} \hat{b}_n(\tau)' d\tau \\ \vdots \\ (\hat{\tau}_{I_n}^n - \hat{\tau}_{I_{n-1}}^n)^{-1} \int_{\hat{\tau}_{I_{n-1}}^n}^{\hat{\tau}_{I_n}} \hat{b}_n(\tau)' d\tau \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_n^S = \begin{pmatrix} \hat{b}'_{n1} \\ \hat{b}'_{n2} \\ \vdots \\ \hat{b}'_{\hat{J}_n} \end{pmatrix}.$$

このとき，(10.32) 式より，危険証券への近似最適投資比率 $\tilde{\varPhi}_t^*$ は次式で表される．

$$\tilde{\varPhi}_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta} \begin{pmatrix} \Sigma'_X B' + \Delta\Lambda_t^X \\ \Delta\Lambda_t^Y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_X + \Lambda_X X_t \\ \lambda_Y + \Lambda_Y Y_t \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \begin{pmatrix} \Sigma'_X B' + \Delta\Lambda_t^X \\ \Delta\Lambda_t^Y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma'_X \left(a_X + A_X X_t + A_{XY} Y_t\right) \\ \Sigma'_Y \left(a_Y + A'_{XY} X_t + A_Y Y_t\right) \end{pmatrix}. \quad (10.38)$$

尚，短期安全証券への近似最適投資比率は，

$$1 - \left(\sum_{i=1}^{I} \tilde{\varphi}_t^{*i} (\tau_i - \tau_{i-1}) + \sum_{j=1}^{J} \tilde{\varPhi}_t^{*j} \right) - \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{\hat{I}_n} \tilde{\hat{\varphi}}_{nt}^{*i} (\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i-1}) + \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \tilde{\hat{\varPhi}}_{nt}^{*j}, \right), \quad (10.39)$$

である．

10.3.2. 物価連動債投資比率を対象とする投資戦略

消費者が国内 I 種類，海外第 n 国 $\hat{I}_n$ 種類の一定満期の物価連動債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．投資対象物価連動債の満期を国内 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_I \leq \bar{\tau}$，海外第 n 国 $0 < \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2 < \cdots < \hat{\tau}_{\hat{I}} \leq \hat{\tau}_n$ とする．また，物価連動債の投資比率過程を国内 $\varPhi_{Pt}^1, \varPhi_{Pt}^2, \cdots, \varPhi_{Pt}^I$，海外第 n 国 $\hat{\varPhi}_{Pnt}^1, \hat{\varPhi}_{Pnt}^2, \cdots, \hat{\varPhi}_{Pnt}^{\hat{I}_n}$ とする．次の記法を用いる．

$$\varPhi_t^P = \begin{pmatrix} \varPhi_{Pt}^1 \\ \varPhi_{Pt}^2 \\ \vdots \\ \varPhi_{Pt}^I \end{pmatrix}, \quad \varPhi_t^S = \begin{pmatrix} \varPhi_t^1 \\ \varPhi_t^2 \\ \vdots \\ \varPhi_t^J \end{pmatrix}, \quad \hat{\varPhi}_{nt}^P = \begin{pmatrix} \hat{\varPhi}_{Pnt}^1 \\ \hat{\varPhi}_{Pnt}^2 \\ \vdots \\ \hat{\varPhi}_{Pnt}^{\hat{I}_n} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\varPhi}_{nt}^S \begin{pmatrix} \hat{\varPhi}_{nt}^1 \\ \hat{\varPhi}_{nt}^2 \\ \vdots \\ \hat{\varPhi}_{nt}^{\hat{J}_n} \end{pmatrix},$$

$$B^P = \begin{pmatrix} b(\tau_1)' \\ b(\tau_2)' \\ \vdots \\ b(\tau_I)' \end{pmatrix}, \qquad B^S = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_J \end{pmatrix}, \qquad \hat{B}_n^P = \begin{pmatrix} \hat{b}_n(\hat{\tau}_1)' \\ \hat{b}_n(\hat{\tau}_2)' \\ \vdots \\ \hat{b}_n(\hat{\tau}_{\hat{I}_n})' \end{pmatrix}, \qquad \hat{B}_n^S = \begin{pmatrix} \hat{b}'_{n1} \\ \hat{b}'_{n2} \\ \vdots \\ \hat{b}'_{n\hat{J}} \end{pmatrix}$$

このとき，(10.32) 式より，危険証券への近似最適投資比率 $\tilde{\varPhi}_t^*$ は (10.38) 式で表される．尚，短期安全証券への近似最適投資比率は，

$$1 - \left(\sum_{i=1}^{I} \tilde{\varPhi}_{Pt}^{*i} + \sum_{j=1}^{J} \tilde{\varPhi}_t^{*j} \right) - \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{\hat{I}_n} \tilde{\hat{\varPhi}}_{Pnt}^{*i} + \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \tilde{\hat{\varPhi}}_{nt}^{*j} \right), \quad (10.40)$$

である．

留意点 10.1. 国際証券投資を国内証券投資と比較するため，国内証券のみに投資する場合，すなわち，$\bar{N} = I + J$ で，

$$\varPhi_t = \begin{pmatrix} \varPhi_t^P \\ \varPhi_t^S \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B^P \\ B^S \end{pmatrix}, \tag{10.41}$$

の場合を考察すると，この場合の近似最適投資比率 $\tilde{\varPhi}_t$ は，

$$\tilde{\varPhi}_t = \frac{1}{\gamma+\delta}(\Sigma_X' B')^{-1}\bigl(\lambda_X + \Lambda_X X_t\bigr) + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}(\Sigma_X' B')^{-1}\Sigma_X'\bigl(a_X + A_X X_t\bigr), \tag{10.42}$$

と表される．

(10.38)(10.42) 両式を比較すると，国際証券投資における最適投資比率は，為替レート固有の状態過程 Y_t の変化の影響を，第 *1* 項の近視眼的需要では，為替レート固有のリスクの市場価格（$\Lambda_t^Y = \lambda_Y + \Lambda_Y X_t$）の変化を通じて間接的に，第 *2* 項の保険需要項では，直接的に受けている．そして，最適投資比率の同変化に対する感応度にリスクの市場価格の内外価格差を表す $\Delta\Lambda_t^X$，$\Delta\Lambda_t^Y$ が影響を及ぼしている．

11. 結論と今後の課題

本章では，本研究の成果を結論として総括するとともに，未解決の問題を今後の課題として整理しておく．

11.1. 結論

本研究は，実用に耐える一般性の高い国際証券市場モデルの下，個人及び生保の証券投資問題において，比較静学と後の実証分析を容易にすべく，最適投資の準解析解，乃至は近似解析解を導出することを最終目的としている．

第 2 章で，短期金利とリスクの市場価格が一般次元の潜在ファクター（状態変数）のアフィン関数である，一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルを導入し，同モデルの下での諸証券の無裁定収益率過程と予算制約式を導出した．予算制約式は，投資が大きくなるにつれて，富の実質収益率のリスクを高める一方，リスクの市場価格に比例して富の実質期待超過収益率を高めること，すなわち，リスクの市場価格は，全消費者共通の単位投資リスク当たりの対価であることを示した．第 3 章〜第 7 章では，アフィン潜在ファクター証券市場モデルの下，国内証券投資問題を考察した．

まず，第 3 章で考察した CRRA 効用消費者の有限時間国内証券投資最適化問題では，HJB 方程式から導出された間接効用関数の非斉次線形偏微分方程式に対し Liu [29] の線形微分方程式を対象とする準解析解構成法を適用し，準解析解を導出し，最適消費と最適投資を算出した．同最適投資は，潜在ファクター（状態変数）の変化を考慮しない近視眼的需要項と同変化に保険を掛ける保険需要項の和として表されること，そして，近視眼的需要項は単位投資リスク当たりの対価を相対的危険許容度（相対的危険回避度の逆数）で重み付けられ，保険需要項は状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を「1− 相対的危険許容度」で重み付けられていることが再確認された．すなわち，最適投資比率は，単位投資リスク当たりの対価を相対的危険許容度で，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を「1− 相対的危険許容度」で重み付けられた加重平均として表される．これは，相対的危険回避度が，単位投資リスク当たりの対価を相対的に低く評価する一方，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を相対的に高く評価する度合であることを示している．尚，問題が高度化する次章以降では近似解析解しか得られないことになるが，本章で得られた解析解は，同近似解析解の近似精度の分析に資する重要な意義を有していることを強調しておきたい．

次に，第 4 章で考察した CRRA 効用消費者の無限時間国内証券投資最適化問題では，HJB 方程式から導出された間接効用関数の非斉次線形偏微分方程式に対し，Liu [29] の準解析解構成法の無限時間版である Kraft *et al.* [23] の準解析解構成法を検討したが，一般には，解核関数の積分条件が満たされず適用不可能であることが判明した．そこで，非斉次項に対し Campbell and Viceira [15]，楠田 [25] の対数線形近似法を適用し，近似解析解を導出し，近似最適消費と近似最適投資を算出した．同近似最適投資を有限時間問題で導出された厳密な最適投資と比較すると，潜在ファクターの変化を考慮しない近視眼的需要項は同一であるが，潜在ファクターの変化に保険を掛ける保険需要項は厳密解では潜在ファクターの相当程度複雑な関数であるにも拘らず，近似解ではアフィン関数と見做していることが判明した．

また，導出された近似解析解の係数体系は一般に解が複数存在する代数方程式の解として表されているため，本最適化問題を前進・後退確率微分方程式の最適制御問題として再解釈することで，Maslowski and Veverka [32] を援用し，本最適化問題の解であるための十分条件を提示した．

第 5 章では，CRRA 効用では不可分となっている相対的危険回避度と相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）を分離できる Epstein-Zin 効用を有する消費者の無限時間国内証券投資最適化問題を考察した．同問題では，HJB 方程式から導出された間接効用関数の偏微分方程式に非斉次項のみならず非線形項が現れた．従って，Epstein-Zin 効用消費者の証券投資最適化問題の場合，有限時間問題であっても，線形微分方程式を対象とした，Liu [29] の準解析解構成法は適用できないことが判明した．そこで，非斉次項に対して Campbell and Viceira [15]，楠田 [25] の対数線形近似法を適用して近似解析解を導出し，近似最適消費と近似最適投資を算出した．近似最適投資において，異時点間代替弾力性は，相対的危険許容度のように，単位投資リスク当たりの対価と（状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する）投資の保険価値に重み付けを与えておらず，投資の保険価値のみに直接影響を与えることが示された．

また，CRRA 効用の場合と同様に，同近似解析解の係数体系は一般に解が複数存在する代数方程式の解として表されているが，効用関数が再帰的に定義されていることから，Maslowski and Veverka [32] を適用することはできない．そこで，再帰的効用関数を対象とした前進・後退確率微分方程式の最適制御問題に十分条件を与えている Agram and Øksendal [1] を援用して，本最適化問題の解であるための十分条件を提示した．

第 6 章では，相似拡大的頑健効用消費者の無限時間国内証券投資最適化問題を考察した．最悪確率を求める効用最小化後に現れる最悪確率下の予算制約式は，曖昧性を考慮しない場合の単位投資リスク当たりの対価は全消費者共通のリスクの市場価格であったのに対し，相似拡大的頑健効用消費者にとっての最悪確率下の単位投資リスク当たりの対価は相対的曖昧性回避度に依存しており，消費者によって異なることを示した．すなわち，より曖昧性回避的な相似拡大的頑健効用消費者であるほど，最悪確率において，単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも低く想定し，その結果，最悪確率下の富過程の実質期待超過収益率を低く想定することを示した．次に，最悪確率下の効用最大化問題を解いた後に現れた間接効用関数の偏微分方程式には，Epstein-Zin 効用の場合と同様に，非斉次項のみならず非線形項が現れたので，非斉次項に対数線形近似法を適用して近似解析解を導出し，近似最適消費と近似最適投資を算出した．近似最適投資において，CRRA 効用の場合は単位投資リスク当たりの対価に相対的危険許容度を，（状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する）投資の保険価値に「1− 相対的危険許容度」を重み付けていたのに対し，相似拡大的頑健効用の場合は，単位投資リスク当たりの対価に「相対的不確実性許容度（相対的危険回避度と相対的曖昧性回避度の和の逆数）」を，投資の保険価値に「1− 相対的不確実性許容度」を重み付けることが判明した．

第 7 章では，生保頑健運用問題を考察した．本問題に関しては，楠田 [26] が生命保険会社の生保販売を証券の空売り投資と見做し，生保債務をポートフォリオに組み込む新たなアプローチにより，生保頑健運用問題を楠田・菊池 [27] の消費と長期証券投資の最適化問題の枠組みの中に位置付け，近似解析解を与えている．そこで，生保頑健運用問題を第 6 章の枠組みの中に位置付け，近似解析解を導出し，近似最適投資比率を算出した．

第 8 章では，アフィン潜在ファクター（国内）証券市場モデルを拡張した，菊池 [21] のアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルにおいて，対数線形近似法を可能とすべく非定常ファクターを捨象したモデルを仮定し，内外諸証券の無裁定実質価格過程を算出し，予算制約式を導出した．

最後に，アフィン潜在ファクター国際証券市場モデルの下，第 9 章で CRRA 効用消費者

の有限時間国際証券投資問題を，第 10 章で相似拡大的頑健効用消費者の無限時間国際証券投資問題をそれぞれ考察した．危険証券の（近似）最適投資比率は，為替レート固有の状態過程の変化の影響を，近視眼的需要では為替レート固有のリスクの市場価格の変化を通じて間接的に，保険需要項では直接的に受けているほか，最適投資比率の同変化に対する感応度にリスクの市場価格の内外価格差が影響を及ぼしていることが判明した．

11.2.　今後の課題

先ず，本研究では，近似解析解の近似精度，消費・富比率，投資比率の実証分析には至っていない．

本アフィン潜在ファクター証券市場モデルでは，インフレ率過程が特定されておらず，実証に必要となる諸証券の名目収益率過程が導出されていないほか，実証においてファクター数を現実的な 3 以上に設定した場合，推定対象の未知係数が多数に上り，推定負担が過重になるという問題がある．これらの問題については，インフレ率過程を特定し，諸証券の名目収益率過程を導出するほか，潜在ファクターに対する適当な「不変アフィン変換」（Dai and Singleton [18]）とブラウン運動に対する適当な直交変換により，潜在ファクターの従う確率微分方程式を簡素な標準形に変換することで対応できる．

また，消費者が現実の消費・投資の決定に本モデルを利用する場合，アフィン潜在ファクター証券市場モデルの未知係数体系を推定するほか，時々刻々観測される時系列データを用いて，時々刻々変動する潜在ファクターを逐次推定する必要がある．かかる推定は，標準形アフィン潜在ファクター証券市場モデルを線形定常確率システムとして解釈し，Kalman フィルター・アルゴリズムに基づく最尤推定法により実現できる．

次に，個人資産運用問題については，本研究で取り扱った CRRA 消費者の有限時間国際証券投資問題において，効用を相似拡大的頑健効用に置き換えるほか，ポートフォリオに人的資本と住宅資本を織り込んだ最適化問題を考察する必要がある．従って，個人資産運用問題において適切な有限時間版の相似拡大的頑健効用を検討する必要があるほか，定常性の仮定の下では有効であった対数線形近似法を見直す必要がある．また，人的資本と住宅資本の適切な収益率モデルを考察する必要がある．

参考文献

[1] N. Agram and B. Øksendal: Infinite horizon optimal control of forward-backward stochastic differential equations with delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **259** (2014), 336–349.

[2] E. Anderson, L. Hansen, and T. Sargent: A quartet of semi-groups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection. *Journal of the European Economic Association*, **1** (2003) , 68-123.

[3] 有本卓: 『システムと制御の数理』, 岩波書店 (1993).

[4] R. Bansal and A. Yaron: Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles. *The Journal of Finance*, **59** (2004), 1481–1509.

[5] N. Barberis: Investing for the long run when returns are predictable. *The Journal of Finance*, **55** (2000), 225–264.

[6] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-60, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018a).

[7] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-61，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018b). Transactions of the Operations Research Society of Japan 近刊.

[8] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 生命保険会社におけるアセット・アロケーションの頑健最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-62, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018c).

[9] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: CRRA 効用消費者の長期証券投資の有限時間最適化問題に対する解析解. Discussion paper J-66, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018d). JARIP ジャーナル近刊.

[10] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 相似拡大的頑健効用消費者の長期国際証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-68, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018e).

[11] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: CRRA 効用消費者の長期国際証券投資の有限時間最適化問題に対する解析解. Discussion paper J-69, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018f).

[12] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: Epstein-Zin 効用に基づく消費者の消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Transactions of the Operations Research Society of Japan, **62**(2019), 23–53.

[13] J. Campbell: Intertemporal asset pricing without consumption data. *The American Economic Review*, **83** (1993), 487–512.

[14] J. Campbell, J. Cocco, F. Gomes, P. Maenhout, and L. Viceira: Stock market mean reversion and the optimal equity allocation of a long-lived investor. *Review of Finance*, **5** (2001), 269–292.

[15] J. Campbell and L. Viceira: *Strategic Asset Allocation* (Oxford University Press, New York, 2002).

[16] D. Duffie and L. Epstein: Asset pricing with stochastic differential utility. *The Review of Financial Studies*, **5** (1992), 411–436.

[17] D. Duffie and R. Kan: A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, **6** (1996), 379–406.

[18] Q. Dai and K. Singleton: Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, **55** (2000), 1943–1978.

[19] L. Epstein and S. Zin: Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework. *Econometrica*, **57** (1989), 937–969.

[20] L. Hansen and K. Singleton: Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models. *Econometrica*, **50** (1982), 1269–1286.

[21] 菊池健太郎: アフィン潜在ファクター国際証券市場モデル. mimeo (2018).

[22] L. Kogan and R. Uppal: Risk aversion and optimal portfolio policies in partial and general equilibrium economies. Working paper 8609, National Bureau of Economic Research (2001).

[23] H. Kraft, F. Seifried, and M. Steffensen: Consumption-portfolio optimization with recursive utility in incomplete markets. *Finance and Stochastics*, **17** (2013), 161–196.

[24] 楠田浩二: 高度成長期以降の環境変容を踏まえた家計資産のの活用戦略—「貯蓄から投資」への修正案の提示. 「彦根論叢」, **394**, (2012), 118-131.

[25] 楠田 浩二: 消費と債券投資の多期間最適問題における高次の近似解析解. Discussion paper J-35, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2013).

[26] 楠田浩二: 相似拡大的頑健効用と 2 ファクター・ハル・ホワイト型本質的アフィン証券市場モデルに基づく生命保険の多期間最適運用問題に対する近似解析解, Discussion paper J-51, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2014).

[27] 楠田浩二, 菊池健太郎: 相似拡大的頑健効用と 2 ファクター本質的アフィン・モデルに基づく消費と株式・全満期国債投資の多期間最適化問題における近似解析解, Discussion paper J-50, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2014).

[28] M. Leippold and L. Wu: Design and estimation of multi-currency quadratic models. *Review of Finance*, **11** (2007), 167-207.

[29] J. Liu: Portfolio selection in stochastic environments. *The Review of Financial Studies*, **20** (2007), 1–39.

[30] P. Maenhout: Robust portfolio rules and asset pricing. *The Review of Financial Studies*, **17** (2004), 951–983.

[31] H. Mamaysky: A model for pricing stocks and bonds. Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management (2002).

[32] B. Maslowski and P. Veverka: Sufficient stochastic maximum principle for discounted control problem. *Applied Mathematics and Optimization*, **70** (2014), 225–252.

[33] R. Mehra and E. Prescott: The equity premium: A puzzle. *Journal of Monetary Economics*, **15** (1985), 145–161.

[34] C. Skiadas: Robust control and recursive utility. *Finance and Stochastics*, **7** (2003), 475–489.

[35] J. Wachter: Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An exact solution for complete markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **37** (2002), 63–91.