確率への招待　8回目

確率②
いくつかの確率の計算

今回も、まずはいくつか練習

例題1）製品が20個あり、そのうち4個が不良品である。
この20個のうちから3個を同時に取り出すとき、
不良品が2個以上含まれる確率はいくつか。

・定義に従って、場合の数÷全体の場合の数
・「不良品がちょうど2個」「不良品が3個」の場合を
別々に求めて足し算。
　または、「不良品が0個」「1個」の確率を計算して
1から引く。
・製品は見た目には区別がつかないかもしれないが、
神様になったつもりで、製品は区別がつくとして、
場合の数を計算する。

答え）

・全体の場合の数：20個の製品から3個を選ぶ組合せ。

$_{20}C_3$＝1140

・不良品が2個以上含まれる場合の数

－不良品がちょうど2個含まれるのは、不良品2個とそれ以外が1個の組み合わせ

$_4C_2 \times {}_{16}C_1$＝96

－不良品がちょうど3個含まれるのは、不良品3個とそれ以外が0個の組み合わせ

$_4C_3 \times {}_{16}C_0$＝4

あわせて、96＋4＝100

⇒よって、求める確率は、100/1140＝<u>5/57</u>

※念のため検算　不良品が1個の場合の数＝480

〃　0個　〃　＝560

例題2）nを2以上の自然数とする。n個のサイコロを同時に振るとき、

①少なくとも1個は1の目が出る確率

②出る目の最小値が2である確率

③出る目の最小値が2で最大値が5である確率

はいくつになるか。

（滋賀大学の昔の入試問題）

①は余事象を使って1－（1の目が1個も出ない）。

②は「1が出ない確率」ではないことに注意！

答え）

①余事象を使って、 １－（1の目が1個も出ない確率）

１の目が１個も出ない場合の数は5^n

全体の場合の数は6^n

よって求める確率は $1-\dfrac{5^n}{6^n}$

（あるいは、来週やる「独立試行の確率」で計算）

②「２から6の目だけが出る確率」ー「３から6の目だけが出る確率」であるので、$\dfrac{5^n-4^n}{6^n}$

③「２から5の目だけが出る確率」

－「３から5の目だけが出る確率」

－「２から4の目だけが出る確率」

＋「３と4だけの目が出る確率」 $\dfrac{4^n-2\cdot3^n+2^n}{6^n}$

例題3）当たる確率が1/n（ただしnは自然数）のクジを
n回引くと、少なくとも1本は当たりが出るといえるか。
なお、いったん引いたクジは元に戻すとする。

答え）余事象を使うと、少なくとも1本は当たりが出る確率
＝1－当たりが1本も出ない確率
＝1－$(1-1/n)^n$
パソコンを使って計算してみると、
n＝4のとき　175/256＝0.6835・・・
n＝10のとき　　　　0.651・・・・
n＝100のとき　　　　0.6339・・・

解析学の知識を使うと、n→∞のとき$(1-1/n)^n \to 1/e$
ただし、eは自然対数の底でe＝2.718・・・
1－1/e＝0.6321・・・・
「n本引くと必ず当たる」わけではない！

例題4）ポーカーの問題

　ジョーカーのない52枚のトランプでポーカーをする。
52枚の中から5枚を選ぶとき、以下の役の確率を求めよ。

①ロイヤルストレートフラッシュ（5枚のマークがすべて同じで、10，J，Q，K，Aであるもの）

②ストレートフラッシュ（5枚のマークがすべて同じで、番号が続いているもの。ただし、ロイヤルストレートフラッシュは除き、{J,Q,K,A,2}というのも続き番号とはみなさない）

③フォーカード（5枚のうち4枚が同じ番号）

④フルハウス（5枚のうち2枚と3枚がそれぞれ同じ番号）

⑤フラッシュ（5枚のマークがすべて同じ。ただし上の役を除く（以下同じ））

⑥ストレート（マークに関係なく5枚の数字が連続している。）

⑦スリーカード（同じ数字が3枚。）

⑧ツーペア（同じ数字の2枚のカードが2組）

⑨ワンペア（同じ数字の2枚のカードが1組）

答え）全事象の数は、 $_{52}C_5 = \dfrac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2{,}598{,}960$

（さすがにパソコンで計算した）

①ロイヤルストレートフラッシュ

マークの選び方4とおり。それぞれに対し数字は1とおり。

よって、確率は、 $\dfrac{4}{2{,}598{,}960} = \dfrac{1}{649{,}740} = 0.00015\%$

②ストレートフラッシュ

マークの選び方が4とおり。数字の選び方は、最初の数字が１，２，…，９の9とおり。

よって、確率は、 $\dfrac{36}{2{,}598{,}960} = 0.0014\%$

③フォーカード

数字が同じ４枚の選び方が１３とおり。残り１枚の選び方が48とおり。 $\dfrac{13 \times 48}{2{,}598{,}960} = \dfrac{624}{2{,}598{,}960} = 0.024\%$

④フルハウス

３枚の同じ数字のカードの選び方は、数字が１３とおりでマークが${}_4C_3$＝４とおりなので、１３×４とおり。

それぞれに対し、残りの2枚の同じ数字の選び方が、数字が１２とおりでマークは${}_4C_2$＝６とおりなので、１２×６とおり。

$$\frac{13 \times 4 \times 12 \times 6}{2{,}598{,}960} = \frac{3744}{2{,}598{,}960} = 0.14\%$$

⑤フラッシュ

１つのマーク１３枚から５枚選ぶ選び方は${}_{13}C_5$＝1287とおり。

ただし、ロイヤルストレートフラッシュとストレートフラッシュを除くので、1287－1－9＝1277。マークが４種類あるから、

$$\frac{1277 \times 4}{2{,}598{,}960} = \frac{5108}{2{,}598{,}960} = 0.20\%$$

⑥ストレート

始まりの番号の選び方が１，２，…,１０の１０とおりで、それぞれのカードの選び方がマークの種類４つずつ。

したがって１０×4^5とおりだが、ロイヤルストレートフラッシュとストレートフラッシュを除く。

$$\frac{10 \times 4^5 - 1 - 36}{2{,}598{,}960} = \frac{10200}{2{,}598{,}960} = 0.39\%$$

⑦スリーカード

３枚の同じ数字のカードの選び方は、数字が１３とおりでマークが${}_4C_3$＝４とおりなので、１３×４とおり。

残り2枚は、数字の違う残り48枚から２枚選ぶ${}_{48}C_2$とおり。

最後に、フルハウスの分を差し引くと、

$$\frac{13 \times 4 \times {}_{48}C_2 - 3744}{2{,}598{,}960} = \frac{54912}{2{,}598{,}960} = 2.1\%$$

⑧ツーペア

数字の同じ２枚について、数字の選び方が${}_{13}C_2$とおり。
それぞれのカードのマークの選び方が${}_4C_2$とおり。
残り１枚は数字の異なる残り４４枚から選ぶので４４とおり。

$$\frac{{}_{13}C_2 \times {}_4C_2 \times {}_4C_2 \times 44}{2{,}598{,}960} = \frac{123552}{2{,}598{,}960} = 4.8\%$$

⑨ワンペア

同じ数字のカードの選び方は、数字が１３とおりで、マークが${}_4C_2$＝６とおりなので、１３×６とおり。

残り３枚は、まず数字の違う残り48枚から１枚選び、さらに数字の異なる44枚から１枚、最後に40枚から１枚選ぶが、3枚の順列ぶん重複して数えているので${}_3P_3$＝６で割る。

$$\frac{13 \times 6 \times 48 \times 44 \times 40 \div 6}{2{,}598{,}960} = \frac{1{,}098{,}240}{2{,}598{,}960} = 42\%$$

無役（ブタ）は1から上記①～⑨を引くと、約５０％。

例題5）秘書の問題、あるいはお見合い問題

　会社で秘書を１人雇うことにしたところ、ｎ人の応募があった。
・応募者を１人１人順番に面接し、その場で採否を決める。
・応募者の能力はきちんと順序がつく（同点はいない）がどの順番で面接に来るかは分からない。
・いったん不合格にした人を、後から「あの人が良かった」と合格にし直すことはできない。
・いったん誰かの採用を決めたら、それ以降の応募者には会えない。
という場合に、どのように採用者を決めればよいか。

採用方法として、
・最初のk人は、どんなに良さそうな人がきてもスルーする。
（一番いい人が最初の方に来るとは限らないから）
・k＋１人目からは、「これまで一番良い人ならば採用」とする。
としよう。どのようにkを決めれば、一番良い人を採用できる確率が最大になるか？？？。

（ここからが解答）

kを未知数として、一番良い人を採用できる確率を計算する。
一番良い人が、実はt番目にいるとしよう。
すると、

①t≦kのとき

最初にスルーしたk人の中に一番いい人がいたが、後悔先に立たずで採用できず。確率ゼロ。

②k＜tのとき

○・・・・○○・・・・○◎

最初のk人

最初のt－１人

t番目の「一番良い人」にまでたどりつくには、最初の（t－１）人のうちで一番いい人が最初のk人の中にいなくてはならない。
（落ち着いて考えれば分かるはず！）

この確率は $\dfrac{k}{t-1}$

一番良い人がt番目にいる確率は、tがどの値であっても1／n。
かくして、求める確率は、

$$P(k) = \frac{1}{n} \times \sum_{t=k+1}^{n} \frac{k}{t-1} = \frac{k}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

これを最大にするようなkが求めるもの。

残念ながら、この式はこれ以上簡単にならないので、kをきれいな形で求めることはできない。

パソコンで計算すると、
n=10のとき、p(2)=0.365…、p(3)=0.3986…、p(4)=0.3982…で
　k＝3のときがpが最大。
n=100のとき、k=37のときが最大で、p=0.371…

解析学で教わる知識で、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\cong \log n$$

という近似式を用いると、 $p(k)\cong \frac{k}{n}\log\left(\frac{n}{k}\right)$

これを最大にするkは、kで微分して0とおくことにより、

$\frac{1}{n}\log\left(\frac{n}{k}\right)-\frac{1}{n}=0$ より $\log\left(\frac{n}{k}\right)=1,$ $\frac{n}{k}=e$ で $k=\frac{n}{e}$

ただし、eは自然対数の底で2．718・・・、1/e＝0．37・・・

よって、nが十分に大きいときは、最初の約37％の人をスルーして、そこからはそれまでに面接した中から一番いい人がきた段階で採用すればいい。

そのとき、全体で一番良い人を採用できる確率は1/e=37%

誰も採用できない確率（最初のk人に一番良い人がいた確率）は、k/n＝1/e＝37％

残りの1-2/e＝26％は、2番目以下の人を採用できてまぁ幸せ。