確率への招待　5回目

順列、組み合わせ②

※来週は中間まとめ＆小テスト

（1）組み合わせの定義

　順列では、いくつかのものの中から選んだものを並べた（並べる順が異なると違うものとみなす）が、今度は、「選び方だけに注目して、その並べ方は区別しない」ものを考える。

　異なるn個のものからr個を選ぶ場合の数は、
・並べ方を区別して数えると、これまで学んだように $_nP_r$ とおり
・しかしこれは、同じr個の組み合わせに対し、$_rP_r = r!$ とおりの並べ方を重複して数えている。
⇒したがって、r個の組み合わせの数は、$_nP_r \div r!$ になる。

これを、n個からr個取る組み合わせといい、$_nC_r$ で表す。
（「しーのえぬ、あーる」 Cは英語のcombinationの頭文字）

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

前ページの式で、形式的にr＝0とおくと、

$$ {}_nC_0 = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1 $$

となってしまうので、いっそのこと、${}_nC_0$＝１と約束する。

${}_nC_r$の性質

$$\boxed{\begin{array}{l} {}_nC_n = {}_nC_0 = 1, \qquad {}_nC_1 = n, \qquad {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \\ {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \end{array}}$$

このうち４番目の式は、次のように解釈できる。

n個のもののうち、ある特定のものに注目し、それをAとしよう。

n個からr個取る組み合わせの数を、「Aが含まれる組み合わせ」と、「Aが含まれない組み合わせ」に分けると、

・Aが含まれる組み合わせの数は、A以外の n-1 個から r-1 個を取る組み合わせの数だから ${}_{n-1}C_{r-1}$ とおり

・Aが含まれない組み合わせの数は、A以外の n-1 個から r 個を取る組み合わせの数だから ${}_{n-1}C_r$ とおり

２つを足し合わせると、全体の組み合わせの数。

前ページの4番目の式から、${}_nC_r$ が、パスカルの三角形に表れる係数であることがわかる。

そもそもパスカルの三角形は、$(x+y)^n$を展開したときの$x^{n-k}y^k$ の係数なのであった。

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \cdots + {}_nC_k x^{n-k} y^k + \cdots + y^n$$

つまり、${}_nC_k$を使うと、$(x+y)^n$の展開が簡単にできることになる。

これは、次のように解釈できる。
$(x+y)^n$を展開したときの$x^{n-k}y^k$の係数は、n個の$(x+y)$のうちk個はyを取ってきて、残りはxを取ってきて掛け算する組み合わせの数に等しいので、これは${}_nC_k$個。

このことから、${}_nC_k$のことを「２項係数」と呼ぶこともある。

例題１）男子４人、女子４人の合計８人から３人を選ぶとき、

①選び方は全部で何とおりあるか。

（当たり前だが、誰が１番目に選ばれ、誰が2番目に選ばれ、・・・という違いはない）

②男子が２人、女子が１人となる選び方は何とおりあるか。

③男子が少なくとも１人選ばれる選び方は何とおりあるか。

答え）

① $_8C_3 = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

②男子２人の選び方は$_4C_2$、女子１人の選び方は$_4C_1$とおり。

$_4C_2 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$

③「男子が少なくとも1人選ばれる」＝全体ー「男子が1人も選ばれない」ということを用いると、

・全体の選び方は①の56とおり

・男子が１人も選ばれない＝全て女子の選び方は$_4C_3$=4

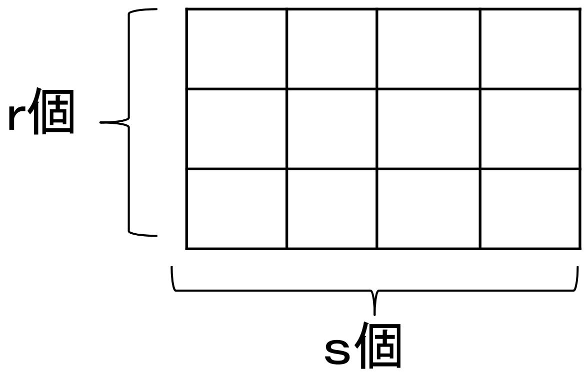
５６－４＝５２とおり

（２）最短経路、同じものを含む順列

　前々回の講義では、碁盤目状の道の最短経路の数が、パスカルの三角形を用いて求められることを学んだ。

　これと前ページの結果とを組み合わせると、最短経路の数が${}_nC_r$で表されることが分かる。

　縦r、横sのマス目の碁盤目状の道路で、左下から右上まで行く最短経路の場合の数は${}_{r+s}C_r$



これは、全部でr＋s個の道を進むうち、何回目にタテに行くか、r個を選ぶ（残りs個は横に行く）組み合わせの数と解釈できる。

前ページの例は、縦r個、横s個という文字を、縦縦横縦・・・というふうに並べる場合の数と同じであった。

これを、縦・横という2種類の文字でなく、もっと一般に、「n個のうちp個は同じもの、q個は別の同じもの、r個はまた別の同じもの・・・であるとき、これらn個のものを1列に並べる場合の数（ただしp個の同じもの、q個の同じもの・・・は区別がつかない）」は、次のように求められる。

考え方１）まずp個を何番目に並べるかの場合の数は ${}_nC_p$ とおり。

そのそれぞれについて、次のq個を何番目に並べるかの場合の数は ${}_{n-p}C_q$ とおり。

そのそれぞれについて、次のr個を何番目に並べるかの場合の数は ${}_{n-p-q}C_r$ とおり。

これを繰り返していくと、

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{n-p-q}C_r \times \cdots = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} \times \ldots = \frac{n!}{p!q!r!\cdots}$$

ただしp＋q＋r＋・・・＝n

考え方2）p個、q個、r個、・・・の合計n個を、とりあえずは区別がつくものとして並べると、その場合の数は、順列 ${}_nP_n$＝n!。

しかし、これはかなりダブって数えている。

n個のうちp個は同じものなので、p!回ダブっている。

さらにq個も同じなので、q!回ダブって数えている。

さらにさらにr個も同じなので、r!回ダブって数えている。

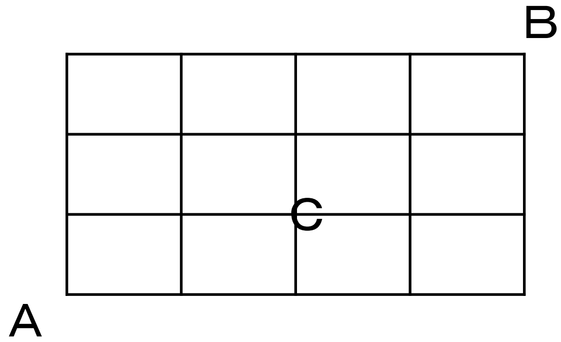
・・・・・・・・・・・・

ということで、積の法則により、同じものをp!q!r!・・・回ダブって数えていることになる。

したがって、求めるものは、 $$\frac{n!}{p!q!r!\ldots}$$

考え方が違っても、最終的に同じ答えにたどり着くのが、数学のスゴイところ！

例題2）右のような格子状の地図で、
A地点からB地点に行く最短経路は
何通りあるか。
また、そのうち、C地点を通らない
ものは何通りあるか。
前々回のように数え上げるのでなく
計算で求めよ。



答え）

A地点からB地点にいく最短経路の数は、

$_7C_3 = 35$

このうち、C地点を通るのは、

（A→Cの最短経路数）×（C→Bの最短経路数）

$= {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$

よって、Cを通らない経路の数は$35 - 18 = 17$

（３）組み分け

例題３）７人を次のように分ける方法は何とおりあるか。

①グループAに２人、グループBに２人、グループCに２人、
グループDに１人と組み分けする。

②２人、２人、２人、１人に組み分けする。

①のように組の区別がつくのであれば、
グループAに入る2人の選び方は${}_7C_2$とおり。
（グループAに入る2人の区別はないから、順列でなく組み合わせ！）
そのそれぞれについて、Bに入る2人の選び方は${}_5C_2$とおり。
そのそれぞれについて、Cに入る2人の選び方は${}_3C_2$とおり。
そのそれぞれについて、Dに入る1人の選び方は${}_1C_1$とおり。
掛け算して、${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = \frac{7!}{2!2!2!1!} = 630$

②のように組に区別がつかない場合は、まず①のように
組に区別がある場合を計算して、それからダブりを消す。
よって、2人からなる3つ組の並び方を消して、630/3!=105。

（4）重複組み合わせ

例題3）３個の文字ａ，ｂ，ｃから重複を許して５つ選ぶ組み合わせは何とおりあるか。

これまでのパターンだと、まず５つを区別して並べる順列を考えた上でダブり分を割って求めたのだが、今回は、ダブりの個数が「ａが何回選ばれたか」により異なってくるので、単純に計算できない。

ややトリッキーだが、次のように考える。

ａａｂｂｃに対し、〇〇｜〇〇｜〇　とa,b,cの間に仕切りを入れる。

ａｂｂｂｃなら、〇｜〇〇〇｜〇

ｂｂｂｂｃなら、｜〇〇〇〇｜〇

このようにすると、「ａ，ｂ，ｃから重複を許して５つ選ぶ組み合わせ」と、「５個の〇と2個の｜を並べる並べ方」が１対１に対応し、場合の数も等しくなることが分かる。

「５個の〇と2個の｜を並べる並べ方」は、同じものを含む順列で学んだように、$_7C_5$とおり。

異なるn個のものから重複を許してr個取る組み合わせの数は、（r個の〇と（その間の）ｎ－１個の仕切り｜の並べ方に等しく）

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$ （重複組み合わせ）

残念ながら、ＨはＰやＣほど役には立たないが、例えば次のようなところで出てくる。

例題4）ｘ＋ｙ＋ｚ＝１０を満たす負でない整数ｘ、ｙ、ｚの組は何とおりあるか。

答え）x、y、z3つの文字から重複を許して10個取るのと同じ

$_3H_{10}$＝$_{12}C_{10}$＝$_{12}C_2$＝６６

重複組合せを知らない場合は、

x=10のとき(y,z)=(0,0)の１とおり、x=9のときはy=0,1の２とおり、

・・・、求めるものは1+2+・・・+11＝６６

おまけ）モンモール数　または攪乱順列、カップルの問題

例題5）１からnまでの数を１列に並べるとき、どのi（１≦i≦n）に対してもｉ番目の数字がｉとは異なるような並べ方は何とおりあるか。

（言い換え：男女のカップルn組を連れてきて、新たに男女でカップルをつくるとき、どのカップルも元の相手とは異なるようなやり方は何とおりあるか）

まずは、nが小さいときに書き出してみる。

n＝1のとき、0とおり

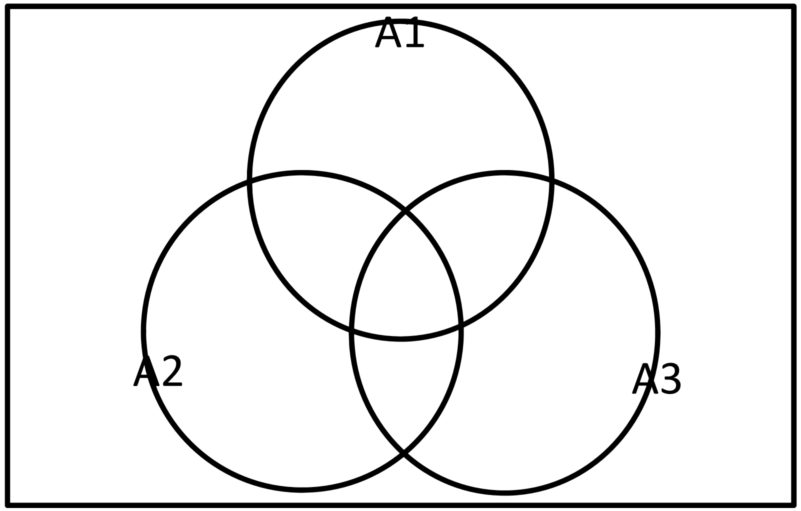
n＝2のとき、（2，１）の1とおり

n＝3のとき、（2，3，1）、（3，1，2）の2とおり

n＝4のとき、（2，1，4，3）、（2，3，4，1）、（2，4，1，3）
（3，1，4，2）、（3，4，1，2）、（3，4，2，1）
（4，1，2，3）、（4，3，1，2）、（4，3，2，1）の9とおり

ここでは、解法を2とおり紹介。
（どちらも、解き方としてはやや特殊なので、覚える必要はない）

考え方１）集合の考え方を使って、補集合を考える。
全体集合U={１からnまでの数の並べ方全体}、
部分集合A_1＝{そのうち、１番目の文字が１となる並べ方}
部分集合A_2＝{そのうち、２番目の文字が2となる並べ方}
・・・・・・・・・・・・
部分集合A_k＝{そのうち、k番目の文字がkとなる並べ方}
とする。



求める場合の数は、

$$n(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) = n(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) = n(U) - n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

$n(U) = n!$であり、

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_n) \qquad n\text{個}$$

$$- n(A_1 \cap A_2) - n(A_2 \cap A_3) - \cdots \quad {}_nC_2\text{個}$$

$$+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots \qquad {}_nC_3\text{個}$$

$$- \cdots$$

$n(A_i \cap A_j \cap \cdots)$は、$k$個が固定されて残りの $n-k$個の順列だから $(n-k)!$

よって、求める数は、

$$n! - n(n-1)! + {}_nC_2(n-2)! - {}_nC_3(n-3)! + \cdots$$

$$= n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, {}_nC_k (n-k)! = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)!$$

$$= n!\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$n=4$の場合、$4! \times \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 24 \times \frac{24 - 24 + 12 - 4 + 1}{24} = 9$

考え方2）求める場合の数をa_nとして、漸化式をつくる。
　１からnを問題の条件を満たすように並べたとき、nがk番目にきたとする（kの選び方は１からn−1までのn−1とおり）。
ここで以下のように2つの場合に分ける。

①n番目の数字がkであった場合

kとnを取り除くと、残りn−2個が攪乱順列になっており、その数はa_{n-2}

②n番目の数字がkとは異なる場合

この条件から、n番目には k だけは置けないこととなる。また、i番目（i≠k, n）には i だけは置けない。つまり、1,…, k−1, k+1, …, n番目についてそれぞれ置けない数字が一つあるので、n−1個の攪乱順列とみなせて、その数はa_{n-1}

よって、$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$　この漸化式を解けばよい。
（詳細は省略するが、両辺をn!で割って$a_n/n! = b_n$とおけば特性解の１つが１になるから$b_n - b_{n-1}$を計算すればよい）
微積分の知識（テイラー展開）を使えば、$\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} = 0.367\cdots$

「n枚のカードをでたらめに並べたときに攪乱順列になる確率は36.7％」