確率への招待　４回目

順列、組み合わせ①

１．順列

（１）順列とは

いくつかのものを、順序をつけて１列に並べる配列

例）タロット（スリーカード）

７８枚のカードから３枚を引く（正逆は無視）。

１枚目が過去、２枚目が現在、３枚目が未来。

この例では、１枚目の選び方は78とおり

２枚目の選び方は（１枚目を除いた）77とおり

３枚目の選び方は（１、２枚目を除いた）76とおり

⇒３枚の順列の場合の数は、前回の「積の法則」で、

７８×７７×７６＝456，456とおり

異なるn個のものの中から、異なるr個を取り出して並べる順列を**n個からr個とる順列**といい、その総数を記号$_{n}P_{r}$で表す。
(「ぴーのえぬ、あーる」と読む。
　Pは英語のpermutation（順列）の頭文字）
さっきの例だと、$_{78}P_{3}$＝456,456

（２）順列の計算
$_{n}P_{r}$がいくらになるか、さっきと同様に考えて、
　１番目の選び方はnとおり
　２番目　　〃　　　ｎ－１とおり
　　・・・・・・・・・・・・・・・・・
　r番目　　〃　　　ｎ－r＋１とおり
　積の法則より、$_{n}P_{r}=n(n-1)\cdots(n-r+1)$

とくにn＝rのとき、

$_nP_n$＝n（n-1）・・・2・1　となり、1からnの自然数をすべて掛け合わせたものになる。

これをnの階乗（factorial）といい記号n！で表す。

n！＝n（n-1）・・・2・1

実際にいくつか計算してみると、

１！＝1

２！＝2×１＝2

３！＝3×２×１＝6

４！＝4×３×２×１＝24

１０！＝10×９×・・・×２×１＝3628800

スターリングの公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$　（証明略）

エクセルではfact(n)で計算できる。

階乗を使うと、$_nP_r$は次のように表せる。

$$ {}_nP_r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} $$

ついでに、０！＝１と約束しておく。
（上の式が、n＝rのときも成り立つようにするため）

例題１）次の値はいくつになるか。

$_5P_3$， $_6P_2$， $_{10}P_3$

（答え） $$ {}_5P_3 = 5\times 4\times 3 = 60 $$

$$ {}_6P_2 = 6\times 5 = 30 $$

$$ {}_{10}P_3 = 10\times 9\times 8 = 720 $$

例題2）男子３人女子２人の計５人が１列に並ぶとき、

①女子２人が隣り合う場合の数

②両端が男子の場合の数

③両端のうち少なくとも一方が女子の場合の数

を求めよ。

（答え）

①女子２人をセットにして考えると、

「男子３人と女子ペア」の並べ方は${}_4P_4$＝２４

それぞれに対して女子ペアの中の並べ方が2

よって、求める並べ方は２４×２＝４８とおり

②まず両端になる男子２人の選び方が${}_3P_2$＝６

残りの男子１名と女子２名の並べ方は${}_3P_3$＝６

よって、求める並べ方は６×６＝３６とおり

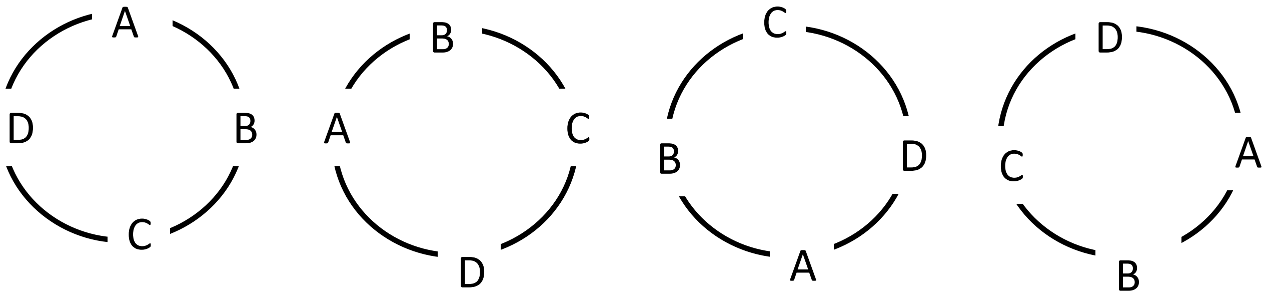
③「少なくとも一方」ということなので、補集合を考えて
全体の場合の数から引く。

・全体の場合の数＝５人の並べ方＝$_5P_5$＝１２０
・「両端のうち少なくとも一方が女子」の補集合は、
「両端が男子」であり、これは②で求めた36とおり。

⇒よって、求めるものは、１２０－３６＝８４

（3）円順列

今度は、１列でなく、円形に並ぶ。
例えば、以下の4つは、（円順列としては）同じ。



したがって、異なるn個のものを円に並べる順列の数は、

$$\frac{{}_nP_n}{n} = (n-1)!$$ で求められる。

これは、「n個のうち特定の１個（例えばA）を固定して、残りの（n－１）個の順列を考えた」のと同じ。

例題３）Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅの５人が輪の形に並ぶとき、

①並び方は全部で何通りあるか。

ただし、輪の形なので、回すと同じになるものは同じ並び方とみなす。

②上の①のうち、ＡとＢが隣り合う並び方は何通りあるか。

（答え）

①円順列の公式を用いると（５－１）！＝２４

②ＡとＢをひとまとまりとして考えると、

・「AB」とC,D,Eの円順列は（４－１）！＝６

・その各々に対し、ABの並べ方が、ABとBAの２とおりある。

よって、６×２＝１２

例題4）男子４人と女子３人が輪の形に並ぶとき、女子３人が続いて並ぶような並び方は何通りあるか。

（答え）

これも、まずは女子３人をひとまとまりと考え、

・「女子３人」と男子４人の円順列　４！＝24

・女子３人の順列　３！＝6

なので、24×6＝144

（４）重複順列

　ここまでは、異なるものを１回ずつ使って並べる順列について考えてきたが、次に、同じものを繰り返し使ってよいとした場合の順列を考えよう。

　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅの５つから、同じものを何度使ってもよいとして、３つとる場合の数は、

　１番目の文字の選び方・・・・Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅの５とおり

　２番目の　　〃　　　　・・・・Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅの５とおり

　３番目の　　〃　　　　・・・・Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅの５とおり

なので、積の法則により５×５×５＝１２５とおり。

　異なるn個のものから重複を許してr個を取り出して１列に並べる順列を、n個からr個を取る重複順列という。

この重複順列の数は $_{n}\Pi_{r} = n^{r}$

（「ぱいのえぬ、あーる」）

例題5）1，2，3，4，5の5つの数字から、重複を許して3つの数字を選んで並べて3桁の数字を作る。

①全部で何とおりの数字ができるか。

②このうち、偶数はいくつあるか

（答え）

①百の位の数字の選び方は5通り。その各々に対して十の位の選び方5通り、一の位の選び方も5通り。

よって、5×5×5＝125

②偶数になるのは、一の位が偶数のとき。

すなわち、一の位は2か4の2通り。

その各々に対して百の位5通り、十の位5通り。

よって、2×5×5＝50

例題6）０，１，２，３，４の５つの数字から、重複を許して3つの数字を選んで並べて3桁の数字を作る。
ただし、頭にゼロがくるものは、３桁の数字とは見なさない。

①全部で何とおりの数字ができるか。

②このうち、偶数はいくつあるか。

（答え）

①百の位の選び方は、0を除く1，２，３，４の４通り。
その各々について十の位は0から4の５通り。
その各々について一の位は0から4の５通り。
よって、４×５×５＝１００

②偶数となるのは、一の位が偶数、０，２，４の３通り。
その各々について百の位は1から4の４通り。
その各々について十の位は0から4の５通り。
よって、３×４×５＝60