確率への招待　3回目
場合の数の計算

数学を身に着けるためには、
やはり実際に自分の手を動かして計算してみる

１．集合

例題１）１から１００の整数のうち、

①3の倍数はいくつあるか

②3の倍数だが5の倍数でないものはいくつあるか

（答え）

①3の倍数は、３，６，９,・・・なので、１００までにいくつあるかは、

１００÷３＝３３・・・１　⇒３３個

②　①で求めた3の倍数の個数から、「３の倍数かつ5の倍数」の個数を引く。

３の倍数かつ5の倍数＝１5の倍数で、

これは１００÷１５＝６・・・１0なので6個

よって、求める個数は３３－６＝２7

例題２）60人の生徒に対し、英語、数学、国語の試験をした。

英語、数学、国語の合格者はそれぞれ30人、30人、20人。

英語と数学両方に合格した者は12人

数学と国語両方に合格した者は10人

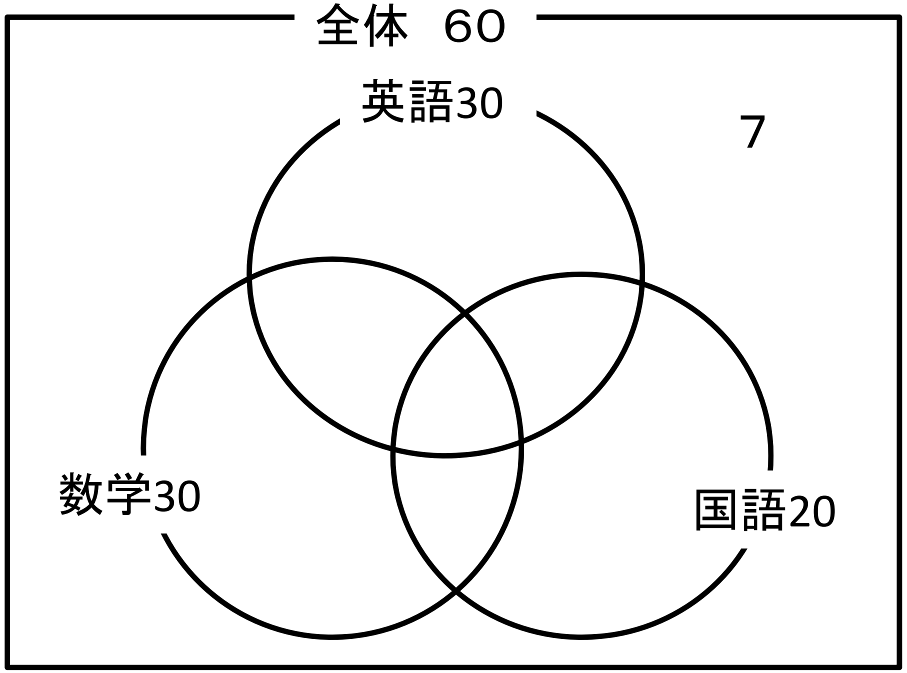
国語と英語両方に合格した者は10人

３科目すべてに不合格であった者は7人であった。

①英語は合格だが数学と国語は不合格の人は何人か

②英語は不合格で数学と国語が合格の人は何人か

ベン図を描いて、数字を書き込んでいく！



英語∩数学＝12
数学∩国語＝10
国語∩英語＝10

n（英語）＋n（数学）＋n（国語）は、どの部分が2回・3回数えられているか？

そこからn（英語∩数学）を引くと？

真ん中の英語∩数学∩国語は、
　60－7－（30＋30＋20）＋（12＋10＋10）＝5
あとは順番に数字を埋めていって、
①英語は合格だが数学と国語は不合格の人　13人
②英語は不合格で数学と国語が合格の人　　5人

２．場合の数

①数え上げ

例題3）３つの区別のつかないサイコロを振るとき、出た目の合計が１２となる場合の数を求めよ。

「場合の数」で最初につまづくのは、上記のような問題で「サイコロを区別するのかどうか」というところ。
でも、それは、問題を出す側が、「この問題では区別するのか、しないのか」きちんと配慮すべきことだと思う。

この場合は、全部書き出して行こう！
漏れ・重複がないとともに、効率よく

辞書式順序で、３つのサイコロの目を小さい順に並べて考える。

（答え）

３つのサイコロの目を、小さいか等しい順に並べて考える。

・１つめが１のとき

残り2つは足して11になる⇒（5，6）のみ

・１つめが2のとき

残り2つは足して10⇒（4，6）、（5，5） （6，4）はダメ！

・１つめが3のとき

残り2つは足して9⇒（3，6）、（4，5）

・１つめが4のとき

残り2は足して8 ⇒（4，4） （2，6）や（3，5）はダメ！

よって、求める場合の数は、6

ちなみに、「3つのサイコロに区別がつく」としたら、

（1，5，6）、（2，4，6）、（3，4，5）は順列を考えると6倍

（2，5，5）、（3，3，6）は順列を考えると3倍

（4，4，4）は1倍 ⇒3×6＋2×3＋1×1＝25

２．場合の数

②和の法則

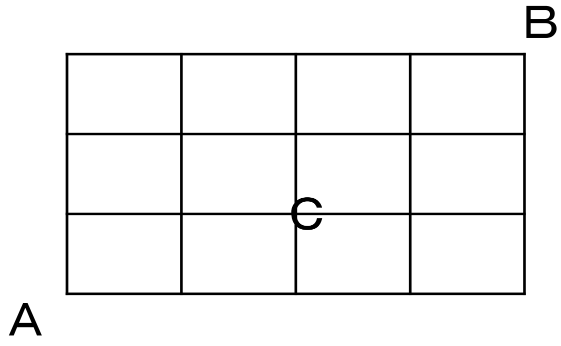
例題4）A，Bの２つのサイコロを振るとき、出た目の和が5の
倍数になる場合の数を求めよ。
今度は「サイコロは区別する」！

（答え）
２つのサイコロの目の合計は2から12であり、そのうち5の倍数は5と10。
和が5になるものは（1，4）、（2，3）、（3，2）、（4，1）の4とおり。
和が10になるものは、（4，6）、（5，5）、（6，4）の3とおり。
よって、求めるものは4＋3＝7とおり

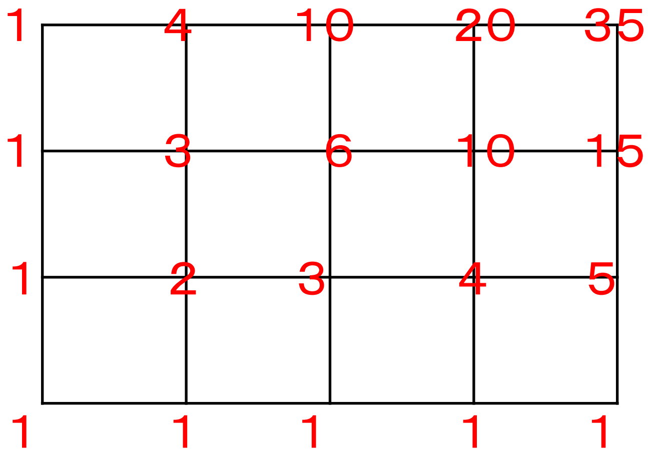
２．場合の数

②和の法則（続き）

例題5）右のような格子状の地図で、
A地点からB地点に行く最短経路は
何通りあるか。
また、そのうち、C地点を通らない
ものは何通りあるか。

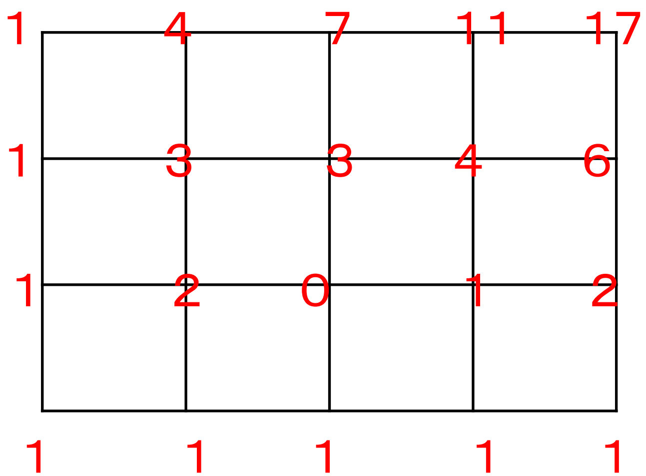


パスカルの三角形のように１つ１つ書き込んでいくのが基本だが、順列の計算でいっぺんに求めることもできる。
（ただし、順列計算だと、途中に通れない道がある場合等は面倒）



AからBに行く最短経路は35とおり

（別解）来週以降やる順列の考え方を使えば、$\dfrac{7!}{3!4!}=35$



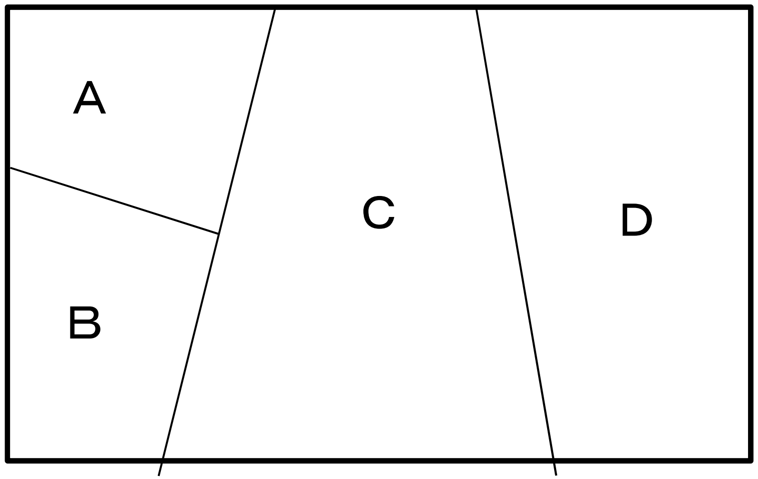
そのうちCを通らないものは17とおり

（別解）Cを通る経路の数を計算して全体から引く。
A→Cは3とおり、C→Bは6とおりで、
A→C→Bは3×6＝18とおり
35－18＝17

２．場合の数

③積の法則

例題6）右の図でA，Ｂ，Ｃ，Ｄの境目がはっきりするように赤、青、黄、白の４色で塗り分けるとする。
同じ色を2回使ってもよいが、隣り合う部分は異なる色で塗るとすると、全部で何通りの塗り分け方があるか。



（答え）いちばん多くの領域と接しているＣの色から考える。
Ｃの塗り方は4とおり。
それぞれに対しAの塗り方はＣの色以外の３とおり。
それぞれに対しＢの塗り方はA，Ｃの色以外の２とおり。
それぞれに対しＤの塗り方はＣの色以外の３とおり
$4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$

「平面上の地図はすべて4色あれば塗り分けられる」
というのが４色定理。

・最初に４色問題に言及したのは、ド・モルガンの法則で有名なド・モルガン。（1852年、友人への手紙で「学生から質問されたが私には分からない」と記述）
・1879年にイギリスの弁護士ケンペが４色定理を「証明」。
⇒1890年に、ヒーウッドがケンペの「証明」の誤りを指摘するとともに、ケンペの議論を一部修正すれば「５色あれば塗り分けられる」ことの証明になることを明らかにした。（グラフ理論の大抵の教科書には載っている）
・1976年に、アッペルとハーケンが、計算機を用いて４色定理を証明。

２．場合の数

③積の法則（続き）

例題7）200の正の約数はいくつあるか。また、それらの合計はいくらになるか。
ただし、１及び200も約数に含めるとする。

（答え）２００を素因数分解すると、$200=2^3\times5^2$
よって、２００の正の約数は$2^a\times5^b$の形をしていて、
aは０，１，２，３の４とおり。それぞれに対しbは０，１，２の3とおり。よって約数の個数は$4\times3=12$。
次に、$(1+2+2^2+2^3)\times(1+5+5^2)$を展開すると、
$=(1+5+5^2)+(2+2\cdot5+2\cdot5^2)$
$+(2^2+2^2\cdot5+2^2\cdot5^2)+(2^3+2^3\cdot5+2^3\cdot5^2)$
となり、200の正の約数が全て（１回ずつ）表れる。
よって、200の正の約数の和は次のように計算できる。
$(1+2+2^2+2^3)\times(1+5+5^2)=15\times31=465$

２．場合の数

④補集合の利用

例題８）Ａ，Ｂ，Ｃの３つのサイコロを振るとき、少なくとも１つは６の目が出る場合の数を求めよ。

サイコロにＡ，Ｂ，Ｃと区別をつけていることに注意！

（答え）

「少なくとも1つは6の目が出る」＝「全体」－「6の目が全くでない」だから、補集合を考えて、

・全体の目の出方　６×６×６＝216

・6の目が全く出ない＝１～5の目しか出ない、ということから、これは5×５×５＝125

よって、求めるものは216－125＝91

おまけ:リーマンのゼータ関数と素数が無限個あることの証明 （試験範囲ではありません）

さっきの例で、

200の正の約数の和は次のように計算できた。

$(1+2+2^2+2^3)\times(1+5+5^2)=15\times31=465$

これと同様のことを考えると、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)\times\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\times\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\times\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right)\times\cdots$$

（全ての素数について掛け算）

実は、$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$である。

証明）$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$

$$>1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{1コ}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2コ}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{4コ}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{8コ}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

これを用いて「素数は無限にたくさんある」ことが証明できる。

証明）背理法により証明する。

素数の数が有限だと仮定して、矛盾が起きることを示す。

最大の素数をpとすると、前のページの式は、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\times\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\times\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

$$=2\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{p}{p-1}$$

この式の右辺は有限個の数の掛け算なので、有限の値。
しかるに、左辺は∞なので矛盾。
よって、「素数の個数は有限」という仮定が誤っていたことが
証明された。　　　　Q.E.D

※「素数が無限にあること」の証明は、ユークリッド「原論」に
　載っているものの方が簡単。
　これも背理法。
　素数が有限個と仮定し、それらを小さい順に2,3,5,…,pと
　する。ここで、a=２×３×５×…×ｐ＋１という数を考えると、
　これはどの素数でも割り切れない（１余る）が、ａ＞pなので
　仮定からaは素数ではない。（ｐが最大の素数なので）
　素数でないのに、他の素数で割り切れないのは矛盾。
　よって、最初の仮定「素数が有限個」が間違っていたことが
　証明された。

ここからは、証明抜きで、ゼータ関数の歴史をお話し

リーマンのゼータ関数

$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$ が、リーマンのゼータ関数。

先ほど示したのは$\zeta(1) = \infty$

sが正の偶数のときのζ(s)の値は知られていて、

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \cdots$

（三角関数のテイラー展開などを用いる）

ζ関数は素数の分布と深く関係しており、

素数定理

自然数nに対しπ（n）をn以下の素数の個数とするとき、

π（n）～n／logn

の証明を目指したドイツの数学者リーマンによって研究された。

ゼータ関数は、sが自然数のときだけでなくsが複素数のときにまで広げることができ（解析接続）、

・ζ（-2）＝ζ(-4)＝ζ(-6)＝・・・＝０

・それ以外のζ関数の零点（ζ(s)＝０となるs）は、実数部分が０と１の間にある

ことが分かる。

素数定理は「ζ関数の零点は、-2,-4,...を除くと、実数部分が１より小さい」ということを証明すればよい。

しかしリーマンはさらに強い「ζ関数の零点は、-2,-4,...を除くと、全て実数部分が1/2であろう」ということを予想し、これは現在まで解決されていない（リーマン予想）。証明したという論文がしばしば査読され、間違いが指摘されている。

「ζ関数の零点は、-2,-4,...を除くと、実数部分が１より小さい」というのは1896年にド・ラ・ヴァレ・プサンとアダマールによって独立に証明され、したがって素数定理も証明された。