確率への招待

0.講義の目的･内容

- データサイエンスの基礎である確率論について、基礎から学ぶ。（高校数学で確率論を十分学んでこなかった諸君も対象とする。）
- 内容としては、
  -集合、要素の数、場合の数
  -順列、組み合わせ
  -確率、独立事象、条件付確率、ベイズの定理
  -確率変数

  を予定

授業の進行状況によって多少の前後ありうべし

1．イントロダクション

2．場合の数、集合、事象

3～5．順列と組み合わせ

6．中間まとめ（小テスト①）

7～11．確率、条件付確率、ベイズの定理等

12．中間まとめ（小テスト②）

13～14．確率変数と確率分布

15．まとめ

成績評価：小テスト(50%）＋期末試験(50%)

1. 確率とは何か

身近な確率の例

①サイコロを１回振って１が出る確率は1/6。
２回振って（１，１）が出る確率は1/36。

②ダーツで60点出る確率は1％。
明日、雨が降る確率は30％。

③様々なデータを勘案すると、邪馬台国が九州にあった確率は40％。

①は古典的な（高校で教わる）確率論。

「根元事象」：ただ一つの結果からなる（これ以上分けることのできない）事象

サイコロだと、{1},{2}, …,{6}の6つが根元事象

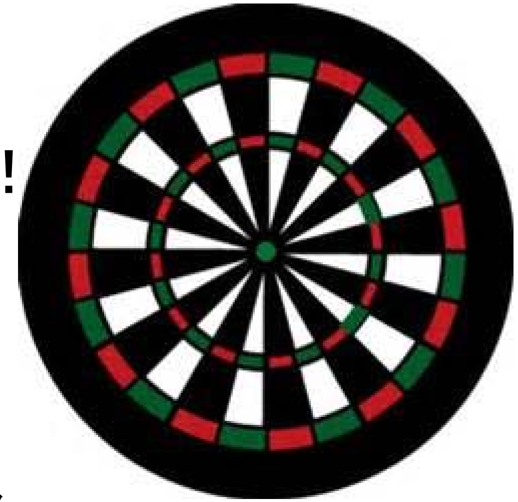
どの根元事象も同様に確からしいときに、

$$P(A) = \frac{\text{事象Aの起こる場合の数}}{\text{起こりえる全ての場合の数}}$$

と定義。

⇒「場合の数」を求めることが、確率計算の基本！

②は、無限個の要素からなる確率
⇒「場合の数」では、確率が定義できない。



ダーツの例を考えると、
中心に当たる確率は「面積」によって計算！

コルモゴロフ（ロシアの数学者）
「面積＝積分論」による確率論の基礎づけ
⇒今や確率論は積分（測度）論の一分野

伊藤清
ブラウン運動の厳密な数学的定式化
⇒確率微分方程式、Black-Scholesの公式

③は、主観的な確率。
（歴史的には、邪馬台国が九州にあったかどうかは、
確率的な事柄ではない）

いわゆる「頻度論」的な確率からは摩訶不思議なものだが、応用範囲は広い。
ベイズ統計：条件付確率に関する「ベイズの定理」を基礎とした統計理論←これが今の主流

- ある情報の下で、Aが正しい確率
⇒更に情報を追加すると、更に的確な予想が。
「情報」＝条件付確率の「条件」
（高校の教科書でも「原因の確率」として紹介）

確率論はもともと「賭け」から生まれた。

カルダノ（イタリア 1501-1576、3次・４次方程式の解法を発見）

賭けサイコロを研究

・１個のサイコロを振るとき、何回振れば、少なくとも1回は1の目が出る確率が1/2以上になるか。

・２個のサイコロを振るとき、何回振れば、少なくとも1回は（1,1）の目が出る確率が1/2以上になるか。

・３個のサイコロを…

⇒１個のサイコロを振ったとき、目の出方は6通り

２個のサイコロだと、目の出方は、

ゾロ目は(1,1),・・・,(6,6)の６通り

異なる目は(1,2),・・・,(5,6)の15通りで、重複こめて30通り　→　合計して36通り

３個のサイコロだと、・・・、216通り （ここまでは正しい）

しかし、カルダノはここで大きな誤りを犯す。

「サイコロを6回振れば、1～6の目が一度は現れるはず
→3回振れば、1/2の確率で1の目が少なくとも1回は出る」

しかし、現代の高校生から見れば、
- サイコロを3回振ったとき、少なくとも1回1の目が出る確率は、「1の目が全く出ない」ことの余事象だから、

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}=0.42$・・・　3回では足りない

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}=0.52$・・・　答えは4回だった！

この誤りのせいで、カルダノは「確率論の父」と呼ばれるチャンスを失った。

現在、「確率論の始まり」とみなされているのは、
パスカル（1623−1662）とフェルマー（1601−1665）との
間に交わされた往復書簡（1654年）。
（パスカルがギャンブラーのド・メレから受けた相談）

①さいころ2つを何度か振って、６－６ の目が１度でも出る確率が 1/2 以上になるためには何度振ればよいか。

② Ａ，Ｂの２人で賭けをして、先に4勝した方が賞金を全て手に入れるとする。Aが２勝、Ｂが１勝したところで賭けを中断しなくてはならなくなった。
　賞金をどう分ければよいか。

⇒２人の数学者は、これに正しい答えを与えた！

・パスカルは数学者としてだけでなく、哲学者、
物理学者としても有名。
「人間は考える葦である」(『パンセ』)
流体力学の「パスカルの原理」、圧力の単位

「パスカルの賭け」
・神の存在を信じるべきか？
神が存在する確率をpとして、神の存在を
信じたときのご利益の期待値を計算。
期待値＝ｐ×（＋∞）（死後の幸福）
＋（１－ｐ）×０（失うものは何もない）
ｐがどんなに小さくても0でない限り、これは∞

- フェルマーの大定理
「nを３以上の自然数とするとき、$x^n＋y^n=z^n$を満たす自然数の組（x,y,z）は存在しない」

フェルマーは本の余白に「私は真に驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを書くには狭すぎる」と書き、別のところでn=４の場合の証明を与えたが、一般の場合の証明は残さなかった。

1994年に、数学者ワイルズが、谷山-志村予想を解決し、フェルマー予想が正しいことをようやく証明。

①について、ド・メレは次のように考えた。

- 「１つのさいころを4回振って、６の目が少なくとも１回出る」という賭けに賭けたところ、勝った。
  ⇒１回振って6の目が出る確率は1/6だから、
  　４回振って6の目が少なくとも１回出る確率は４倍して4/6
  →勝つ確率が高い
  →実際に勝った！
- 同じように考えると、「2つのさいころを24回振って、6–6の目が少なくとも1回出る」確率は、$\frac{1}{36}\times 24 = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$
  →さっきと同じ確率だから、これも勝てるはずだ
  →でも実際にやってみると・・・・大負け！

さて、なぜだろう？（カルダノと同じ誤り！）

- １つのさいころを４回振って、少なくとも1回、６の目が出る確率
  ⇒「６の目が全然出ない確率」を計算して、1から引く

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}=0.517\cdots$$

- ２つのさいころを２４回振って、少なくとも1回、6−6が出る確率
  ⇒これも「6−6が１回も出ない確率」を計算して1から引く

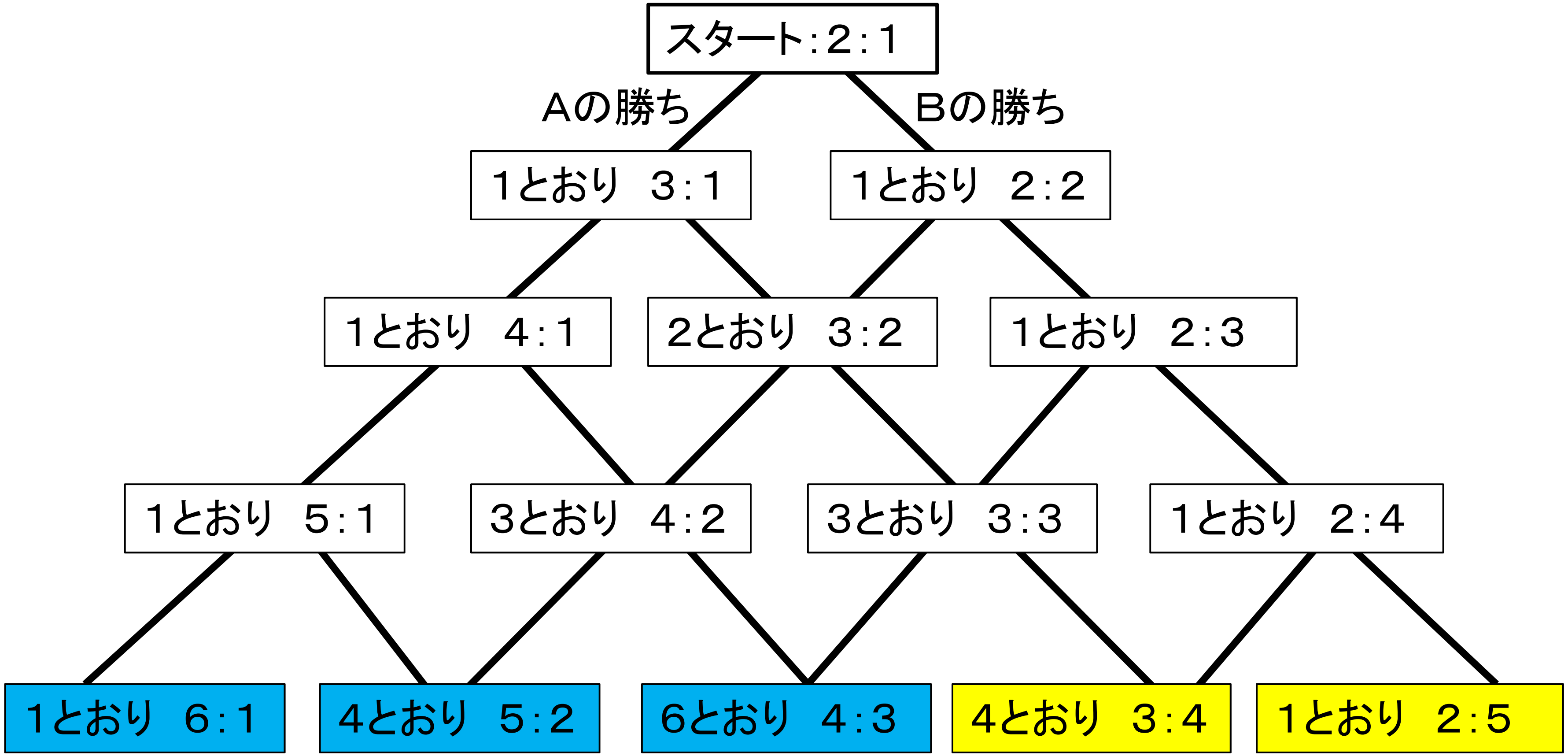
$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=\cdots=0.491\cdots$$

では、何回さいころを振れば、確率が0.5以上になるのか？

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n\geq 0.5 \text{ より、} n\geq\frac{\log 2}{\log 36-\log 35}=24.6\cdots$$

⇒２５回振ればよかった！

②について
ここで有名な「パスカルの三角形」が登場！



Aが勝つのは、1＋4＋6＝11とおり
Bが勝つのは、4＋1＝5とおり　　⇒賞金は11：5に分配