CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-66

CRRA 効用消費者の長期証券投資の有限期間最適化問題に対する解析解

バトボルド ボロルソフタ・菊池健太郎・楠田浩二

2018 年 9 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

CRRA 効用消費者の長期証券投資の有限期間最適化問題に対する解析解

バトボルド ボロルソフタ * 菊池 健太郎 † 楠田 浩二 ‡

2018 年 9 月 3 日

概要

Liu [7] は，潜在ファクターが自身の 2 次関数であるドリフト項及び拡散項を持つ拡散過程に従い，短期金利，リスクの市場価格の平方等が潜在ファクターの 2 次関数で記述される証券市場モデルを仮定し，消費と投資（短期債と複数の危険証券）の問題を考察している．彼は同問題の最適化の結果導出される非斉次偏微分方程式に対し，非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式の解析解に基づいて解析解を構成している．本稿では，潜在ファクターが多次元版 Ornstein-Uhlenbeck 過程，短期金利，リスクの市場価格等が潜在ファクターのアフィン関数にそれぞれ従う証券市場モデルを仮定し，消費と投資（短期債，全満期債券，主要指数）の問題に対して Liu [7] の解析解構成法により解析解を導出する．

キーワード：解析解，確率制御，債券投資，消費と投資の問題，長期証券投資，

1 序論

平成バブル崩壊以降の長期停滞の一因としてイノベーション創出のためのリスク・マネーの供給不足が指摘されてきたほか，社会保障制度の持続困難に伴い各家計が退職後に備えるための資産形成を行う必要性が高まってきたことから，国家経済戦略として「貯蓄から投資へ」が提唱されて久しいが，家計の投資比率は低迷を続けている．一因として，政府が家計の資産運用において模範的アセット・アロケーションを提示出来ていないことが挙げられる．また，GPIF が 2014 年秋，公的年金運用における株式投資比率を引き上げる方針を決定したが，本来，公的年金運用における株式投資比率は，我が国の平均的家計の最適アセット・アロケーションを踏まえて設定されるべきものである．こうした観点から，家計の模範的アセット・アロケーションの探求は，現代日本経済の喫緊の課題と思料する．

証券投資においては，分散投資の重要性が強調されてきたが，分散投資に加えて長期投資が重要である．Campbell and Viceira [5] は，長期投資においては安全証券は短期債ではなく長期物価連動債であることを指摘し，投資対象に長期物価連動債を含めるべきことを強調している．こうした観点から，Campbell and Viceira [5] は金利変動下の消費と株式・債券投資の最適化問題を研究しているが，同問題では，一般に，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式（以下，「HJB 方程式」）から導出される偏微分方程式に金利変動リスクに起因する非斉次項が現れ，解析解の導出を困難にする．

本稿の目的は，家計の模範的アセット・アロケーションの探求の第 1 次接近として，実用に耐える一般性の

---

* 滋賀大学大学院博士後期課程　Email: bolorsuvdbatbold@gmail.com

† 滋賀大学経済学部　Email: kentaro-kikuchi@biwako.shiga-u.ac.jp

‡ 滋賀大学経済学部　Email: kusuda@biwako.shiga-u.ac.jp　本研究は JSPS 科研費 26380392 の助成を受けたものである．

高い証券市場モデルを仮定した上で，標準的な CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 効用を有する消費者の長期債を含む長期証券投資の最適化問題に対し解析解を導出することである．

Campbell and Viceira [5] は，CRRA 効用消費者が短期債と一定満期の長期物価連動債に投資する長期投資の最適化問題をバシチェック金利モデルの下で解いている．彼等は HJB 方程式から導出される偏微分方程式の非斉次項に Campbell [4] の提案した対数線形近似法を応用し，近似解析解を導出している．

他方，Liu [7] は，潜在ファクターが自身の 2 次関数であるドリフト項及び拡散項を持つ拡散過程に従い，短期金利，リスクの市場価格の平方等が潜在ファクターの 2 次関数で記述される証券市場モデルを仮定し，CRRA 効用を有する消費者の消費と投資（短期債と複数の危険証券）の有限期間最適化問題を考察している．Liu [7] は HJB 方程式から導出された非斉次偏微分方程式に対し，非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式の解析解に基づいて解析解を構成している．

本稿では，潜在ファクターが多次元版 Ornstein-Uhlenbeck 過程，短期金利，リスクの市場価格等が潜在ファクターのアフィン関数にそれぞれ従う「アフィン潜在ファクター証券市場モデル」を仮定し，消費と投資（短期債，全満期の国債，主要指数）の有限期間最適化問題を考察する．

我々は本問題に Liu [7] の解析解構成法を適用し，解析解導出を導出した．本問題の無限期間版はバトボルド・菊池・楠田 [2] により Campbell and Viceira [5] の対数線形近似法で近似解析解が与えられている．厳密解に基づく最適投資を近似解に基づく近似最適投資と比較すると，将来の潜在ファクターの変化を考慮しない近視眼的需要項は同一であるが，将来の潜在ファクターの変化に保険を掛ける保険需要項は本来潜在ファクターの複雑な関数であるにも拘らず，近似解ではアフィン関数と見做していることが判明した．

また，バトボルド・菊池・楠田 [3] は，家計の模範的アセット・アロケーションの探求の第 2 次接近として，ナイトの不確実性下，曖昧性回避的な「相似拡大的頑健効用」（Maenhout [8]）を有する消費者がアフィン潜在ファクター証券市場モデルの下，全満期の国債，株式指数等の主要指数に投資する長期証券投資の最適化問題を考察している．同問題では，HJB 方程式から導出される非斉次偏微分方程式に非斉次項のみならず非線形項が現れるため，Liu [7] の解析解構成法は適用出来ない．そこで，彼等は Campbell and Viceira [5] の対数線形近似法を適用して近似解析解を導出している．しかし，同近似解析解の近似精度の検証は今後の課題として残されている．CRRA 効用の特殊な場合が相似拡大的頑健効用なので，本稿で示された解析解は，同近似解析解の近似精度の検証に利用出来る．

本稿の構成は次の通りである．2 章では，アフィン潜在ファクター証券市場モデルと投資家の最適化問題を説明する．3 章で，HJB 方程式から導出される値関数の偏微分方程式より解析解を導出する．4 章で，国債の典型的投資戦略に対する最適投資比率を示す．5 章で，今後の課題を述べる．

2　アフィン潜在ファクター証券市場モデルと投資家の最適化問題

本章では，先ず，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介し，証券価格過程の従う確率微分方程式を示す．次に，投資家の最適化問題を示す．

2.1　市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する．投資家共通の確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ によりモデル化されている．ここで，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は N 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである．期待値作用素を E，$\mathcal{F}_t$ の下での期待値作用を E_t と表記する．市場では，1 種類の消費財，安全証券 (以下，「短期安全証券」と呼ぶ)，「中長期安全証券」としての満期

までの期間が最長 $\bar{\tau}$，額面 1 円，任意の満期の信用リスクの無い割引債（以下，「割引国債」と呼ぶ）*1，J 種類の非債券の主要指数（株式指数，REIT 指数等）が任意の時点で市場で取引されている．短期安全証券の価格を P 円，満期 T の割引債の価格を P^T 円，非債券の主要指数の配当込みの価格を S^j 円と表記する．ここで，$P_0 = 1$ である．消費財空間は，消費率過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty$ $a.s.$ を満たす非負値可測過程の空間とする．

本稿では，一般性の高い，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定する．

仮定 1　N 次元潜在ファクター X_t は次の確率過程に従う．

$$dX_t = K(\theta - X_t)\,dt + \Sigma\,dB_t, \tag{2.1}$$

ここで，θ は N 次元定数ベクトル，K, Σ は $N \times N$ 定数行列である．

国債 (金利の期間構造）については，状態変数 X_t のアフィン・モデル（Duffie and Kan [6] ）を仮定し，非債券の主要指数については，Mamaysky [9] の提案したアフィン型モデルにおいて非定常項を捨象したモデルを仮定する．

仮定 2

1. リスクの市場価格 Λ_t，瞬間的スポット・レート r_t は，潜在ファクター X_t のアフィン関数である．

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda X_t, \tag{2.2}$$
$$r_t = r_0 + r' X_t, \tag{2.3}$$

ここで，$K + \Sigma\Lambda$ は正則である．

2. 非債券の主要指数の配当過程 D_t^j は潜在ファクター X_t の次式で表される関数である．

$$D_t^j = (d_{j0} + d_j' X_t)\exp(b_{j0} t + b_j' X_t). \tag{2.4}$$

2.2 証券価格過程

以下では，割引国債の満期までの期間を $\tau = T - t$ と表記する．

補題 1　仮定 1・2 の下，証券価格過程は次を満たしている．

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t\,dt, \qquad P_0 = 1. \tag{2.5}$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = (r_t + b'(\tau)\Sigma\Lambda_t)\ dt + b'(\tau)\Sigma\,dB_t, \qquad P_T^T = 1, \tag{2.6}$$

ここで，$b(\tau)$ は次の常微分方程式の解である．

$$\frac{db(\tau)}{d\tau} = -(K + \Sigma\Lambda)' b(\tau) - r, \qquad b(0) = 0. \tag{2.7}$$

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = \left(r_t + b_j'\Sigma\Lambda_t\right)\ dt + b_j'\Sigma\,dB_t, \tag{2.8}$$

ここで，

$$b_j = -(K + \Sigma\Lambda)'^{-1}(r - d_j). \tag{2.9}$$

証明は補論 A.1 参照．

*1 厳密には，物価連動債が中長期安全証券であるが，我が国では，直近 20 年間以上，物価安定が継続しているほか，物価連動債は流通量が限定的で，投資対象として組み入れ難いことから，本稿では，国債を近似的に「中長期安全証券」と見做している．

2.3 投資家の最適化問題

非債券の主要指数に対する投資比率を Φ_t^j と表記する．また，割引国債については，任意の満期の割引国債を投資対象としているため，富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる．そこで，割引国債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$ と表記する[*2]．以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi_t = \left(\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) b(\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j b_j \right)' \Sigma. \tag{2.10}$$

以下，Ψ_t を「投資過程」乃至は「投資」と略称する．

このとき，予算制約式が次の補題で示される．

補題 2 投資過程 Ψ_t と消費率過程 c_t を所与とする．このとき，仮定 1・2 の下，富過程 W_t は次の予算制約式を満たす．

$$dW_t = \{W_t\,(r_t + \Psi_t \Lambda_t) - c_t\}\, dt + W_t \Psi_t\, dB_t. \tag{2.11}$$

証明は補論 A.2 参照．

予算制約式 (2.11) は，富過程が $u = (c, \Psi)$ で決定されることを示しており，投資家の効用最大化問題における制御変数は $u = (c, \Psi)$ であることが分かる．

仮定 3 投資家は次の相対的危険回避度一定効用を予算制約式 (2.11) の下で最大化する．

$$U(c) = \mathrm{E}\left[\int_0^T \alpha\, e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt + (1-\alpha)\, e^{-\beta T} \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]. \tag{2.12}$$

状態変数を $\mathbb{X}' = (W, X')$ と表記する．予算制約式 (2.11) を満たす制御変数 $u = (c, \Psi)$ を初期状態 $\mathbb{X}_0' = (W_0, X_0')$ に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を $\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)$ と表記する．このとき，「富を含む状態変数に対する広義の間接効用関数」J（以下，「間接効用関数」と呼ぶ）が次式で定義される．

$$J(t, \mathbb{X}_t^u) = \mathrm{E}_t\left[\int_t^T \alpha\, e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt + (1-\alpha)\, e^{-\beta T} \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right], \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{2.13}$$

本稿における消費と投資の最適化問題と価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} J(0, \mathbb{X}_0). \tag{2.14}$$

3 最適消費・投資の解析解

本章では，HJB 方程式から推測された価値関数を構成する未知関数 $G(t, X_t)$ の偏微分方程式を導出した後，同方程式を Liu [7] の解析解構成法を用いて，最適消費・投資の解析解を導出する．

[*2] 尚，このとき，或る特定の満期の割引国債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため，許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする．

3.1　価値関数（を構成する未知関数）の偏微分方程式の導出

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\sup_{u\in\mathcal{B}(Z_0)}\left\{J_t(t,\mathbb{X}^u)+\begin{pmatrix}W_t\left(r_t+\Psi_t\Lambda_t\right)-c_t\\ K(\theta-X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}J_W(t,\mathbb{X}^u)\\ J_X(t,\mathbb{X}^u)\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}W_t\Psi_t\\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_t\Psi_t\\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}J_{WW}(t,\mathbb{X}^u) & J_{WX}(t,\mathbb{X}^u)\\ J_{XW}(t,\mathbb{X}^u) & J_{XX}(t,\mathbb{X}^u)\end{pmatrix}\right]+\alpha\,e^{-\beta t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right\}=0, \quad (3.1)$$

$$\text{s.t.}\quad J(T,\mathbb{X}_T^u)=(1-\alpha)\,e^{-\beta T}\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

HJB 方程式における最大化の必要条件から制御変数の最適解 $u^*=(c^*,\Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^*=\alpha^{\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{\beta}{\gamma}t}J_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.2)$$

$$\Psi_t^*=\frac{\pi_t^*}{W_t^{*2}J_{WW}}, \quad (3.3)$$

ここで，

$$\pi_t^*=-W_t^*\left\{J_W\Lambda_t'+J_{WX}\Sigma\right\}. \quad (3.4)$$

最適消費 (3.2) 式と最適投資 (3.3) 式を HJB 方程式 (3.1) に代入し，

$$W_t^*J_W\Lambda_t'(\Psi_t^*)'+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}W_t^*\Psi_t^*\\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_t^*\Psi_t^*\\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}J_{WW} & J_{WX}\\ J_{XW} & J_{XX}\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'J_{XX}\right]-\frac{\pi_t^*(\pi_t^*)'}{2W_t^{*2}J_{WW}}, \quad (3.5)$$

に注意して整理すると，次の間接効用関数 J に関する偏微分方程式が得られる．

$$J_t+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'J_{XX}\right]-\frac{\pi_t^*(\pi_t^*)'}{2W_t^{*2}J_{WW}}+W_t^*r_tJ_W+\{K(\theta-X_t)\}'J_X+\frac{\gamma}{1-\gamma}c_t^*J_W=0. \quad (3.6)$$

上記偏微分方程式から間接効用関数 J は未知関数 $G(t,X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$J(t,\mathbb{X}_t)=e^{-\beta t}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(t,X_t)\big)^{\gamma}. \quad (3.7)$$

従って，HJB 方程式左辺の最大化の十分条件は，次式で表される Hessian $\mathbf{H}$ が任意の制御変数 $(c,\Psi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N$ に対し負定符号であることで確認出来る．

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}-\alpha\gamma e^{-\beta t}c^{-\gamma-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\gamma e^{-\beta t}(W_t^*)^{1-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\gamma} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma e^{-\beta t}(W_t^*)^{1-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\gamma}\end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

間接効用関数 J に偏微分を施し，(3.2)(3.3) 式に代入し，偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.6) に代入すると，次の命題を得る．

命題 1　仮定 1-3 の下，本問題 (2.14) の価値関数，最適消費，最適投資は，それぞれ (3.7) 式，(3.9) 式，(3.10) 式で表される．ここで，$G(t,X_t)$ は偏微分方程式 (3.11) の解である．

$$c_t^*=\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}, \quad (3.9)$$

$$\Psi_t^*=\frac{1}{\gamma}\Lambda_t'+\frac{G_X'}{G}\Sigma, \quad (3.10)$$

$$G_t + \mathcal{L}G + \alpha^{\frac{1}{\gamma}} = 0, \qquad G(T, X_T) = (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{3.11}$$

ここで，$\mathcal{L}$ は次式で定義される線形微分作用素である．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}G = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma' G_{XX}\right] + \left(K(\theta - X) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma(\lambda + \Lambda X)\right)' G_X \\ - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\lambda+\Lambda X)'(\lambda+\Lambda X) + \frac{\gamma-1}{\gamma} r_t + \frac{\beta}{\gamma}\right) G.\end{aligned} \tag{3.12}$$

証明は補論 A.3 参照.

3.2 解析解の導出

偏微分方程式 (3.11) は非斉次項 $\alpha^{\frac{1}{\gamma}}$ を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．Liu [7] は，同方程式の非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式 (3.13) の初期値問題の解析解を利用した解析解構成法を提示しているので，我々も同構成法により解析解を導出する．

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau, X) = \mathcal{L} g(\tau, X), \qquad g(0, X) = 1, \tag{3.13}$$

ここで，$\tau = T - t$ である．

偏微分方程式 (3.13) の解は次式で表される．

$$g(\tau, X) = \exp\left(a_0(\tau) + a(\tau)' X + \frac{1}{2} X' A(\tau) X\right), \tag{3.14}$$

ここで，$A(\tau)$ は対称行列であり，係数体系 $(a_0(\tau), a(\tau), A(\tau))$ は (3.14) 式を (3.13) 式に代入した後に現れる X に関する恒等式 (3.16) から導かれる常微分方程式 (3.17)-(3.19) の解となる．

このとき，微分作用素 $\mathcal{L}$ の線形性により，偏微分方程式 (3.11) の解析解を次式で表現出来る．

$$G(t, X) = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \int_0^{T-t} g(s, X)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X). \tag{3.15}$$

(3.14) 式の関数 g に偏微分を施し，偏微分方程式 (3.13) に代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}a_0(\tau) + X'\frac{d}{d\tau}a(\tau) + \frac{1}{2}X'\frac{d}{d\tau}A(\tau)X = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big[\Sigma\Sigma'(aa' + A + aX'A + AXa' + AXX'A)\big] \\ + \left\{K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)X\right\}'(a + AX) \\ - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\lambda'\lambda + 2\lambda'\Lambda X + X'\Lambda'\Lambda X) + \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r'X) + \frac{\beta}{\gamma}\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

上式は X に関する恒等式なので，次の (a_0, a, A) に関する常微分方程式が導出される．

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}a_0(\tau) = \frac{1}{2}a(\tau)'\Sigma\Sigma' a(\tau) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma' A(\tau)] + \left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right)' a(\tau) - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 + \frac{\beta}{\gamma}\right), \\ a_0(0) = 0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}a(\tau) = \left\{A(\tau)\Sigma\Sigma' - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)'\right\}a(\tau) + A(\tau)\left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right) - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma}r\right), \\ a(0) = 0,\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\frac{d}{d\tau}A(\tau) = A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - 2\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' A(\tau) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0) = 0. \tag{3.19}$$

次の記法を用いる．

$$a_t^*(X_t) = \frac{\int_0^{T-t} \alpha^{\frac{1}{\gamma}} g(s, X_t) a(s)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X_t) a(\tau)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}} \int_0^{T-t} g(s, X_t)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X_t)}, \tag{3.20}$$

$$A_t^*(X_t) = \frac{\int_0^{T-t} \alpha^{\frac{1}{\gamma}} g(s, X_t) A(s)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X_t) A(\tau)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}} \int_0^{T-t} g(s, X_t)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X_t)}. \tag{3.21}$$

このとき，次の命題を得る．

命題 2　仮定 1-3 の下，本問題 (2.14) の最適消費及び最適投資は次を満たしている．

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \exp\left[-\left(\frac{\beta}{\gamma} t + a_0(T-t) + a(T-t)' X_t + \frac{1}{2} X_t' A(T-t) X_t\right)\right] W_t^*, \tag{3.22}$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma}(\lambda + \Lambda X_t)' + \big(a_t^*(X_t) + A_t^*(X_t) X_t\big)'\Sigma, \tag{3.23}$$

ここで，(a_0, a, A) は (3.24)-(3.26) 式で表され，A は対称行列である．

$$\begin{aligned} a_0(\tau) = \int_0^\tau \Bigg\{ &\frac{1}{2} a(s)'\Sigma\Sigma' a(s) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}[\Sigma\Sigma' A(s)] + \left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right)' a(s) \\ &- \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma} r_0 + \frac{\beta}{\gamma}\right)\Bigg\} ds, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} a(\tau) = &\exp\left(\int_0^\tau \left\{A(s)\Sigma\Sigma' - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)\right\} ds\right) \\ &\times \int_0^\tau \left(A(s)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda - K\theta\right) + \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma} r\right) e^{\int_0^s \left\{-A(t)\Sigma\Sigma' + \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)\right\} dt} ds, \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$A(\tau) = C_2(\tau) C_1^{-1}(\tau), \tag{3.26}$$

ここで，

$$\begin{pmatrix} C_1(\tau) \\ C_2(\tau) \end{pmatrix} = \exp\left(\tau \begin{pmatrix} K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda & -\Sigma\Sigma' \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

証明は補論 A.4 参照．

留意点 1　バトボルド他 [2] は CRRA 効用を有する消費者がアフィン潜在ファクター証券市場モデルの下，全満期の国債，株式指数等の主要指数に投資する長期証券投資の無限期間最適化問題を Campbell and Viceira [5] の対数線形近似法により近似解析解を導出しているが，近似最適投資 $\tilde{\Psi}_t^*$ は次式で示されている．

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma}(\lambda + \Lambda X_t)' + \big(a + A X_t\big)'\Sigma. \tag{3.28}$$

ここで，(a, A) は或る代数方程式の解として定められる定数．

上式を (3.23) 式の最適投資 $\tilde{\Psi}_t^*$ と比較すると，将来の潜在ファクターの変化を考慮しない第 1 項の近視眼的需要項は同一であるが，将来の潜在ファクターの変化に保険を掛ける第 2 項の保険需要項は，本来，状態変数 X_t に依存する $(a^*(X_t), A(X_t^*))$ を定数と見做していることが分かる．この近似における単純化による代償の大きさについては，実証分析に委ねられる．

標準ブラウン運動が N 次元で，非債券の主要指数が J 種類なので，割引国債については，$I(=N-J)$ 群の投資対象を設定することにより，最適投資比率を決定できる．次章では，典型的な国債投資戦略に基づく最適投資比率を例示する．

4　最適投資比率の典型例

本章では，典型的な国債投資戦略として，国債投資比率密度を対象とする投資戦略，国債投資比率を対象とする投資戦略，国債指数を対象とする投資戦略を取り上げ，各戦略における最適投資比率を示す．

4.1　国債投資比率密度を対象とする投資戦略

消費者が割引国債の満期までの期間を I 群に区分し，各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を採用する場合を考察する．説明の便宜上，$\tau_0 = 0$，$\tau_I = \bar{\tau}$ と表記し，割引国債の満期までの期間を $(\tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \cdots, (\tau_{I-1}, \tau_I]$ に区分する．また，投資比率密度過程を $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \cdots, \varphi_t^I)$ とするほか，次のように記法を定める．

$$\Phi_{1t} = \begin{pmatrix} \Phi_{1t}^P \\ \Phi_{1t}^S \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^P \\ B_1^S \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

ここで，

$$\Phi_{1t}^P = \begin{pmatrix} \varphi_t^1(\tau_1 - \tau_0) \\ \varphi_t^2(\tau_2 - \tau_1) \\ \vdots \\ \varphi_t^I(\tau_I - \tau_{I-1}) \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{1t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \qquad B_1^P = \begin{pmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} b'(\tau)d\tau \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} b'(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I} b'(\tau)d\tau \end{pmatrix}, \qquad B_1^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix}.$$

このとき，(2.10) 式及び (3.23) 式より，最適投資比率 Φ_{1t}^* は次式で表される．

$$\Phi_{1t}^* = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B_1')^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + (B')_1^{-1}\{a_t^*(X_t) + A_t^*(X_t)X_t\}. \tag{4.2}$$

尚，短期安全証券への最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \varphi_t^{*i}(\tau_i - \tau_{i-1}) - \sum_{j=1}^J \Phi_t^{*j}$ である．

4.2　国債投資比率を対象とする投資戦略

消費者が I 種類の一定満期の割引国債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．投資対象国債の満期を $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_I \leq \bar{\tau}$ とし，各満期の国債への投資比率を $\Phi_P^1, \Phi_P^2, \cdots, \Phi_P^I$ とする．次のように記法を定める．

$$\Phi_{2t} = \begin{pmatrix} \Phi_{2t}^P \\ \Phi_{2t}^S \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} B_2^P \\ B_2^S \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

ここで，

$$\Phi_{2t}^P = \begin{pmatrix} \Phi_{Pt}^1 \\ \Phi_{Pt}^2 \\ \vdots \\ \Phi_{Pt}^I \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{2t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \qquad B_2^P = \begin{pmatrix} b(\tau_1)' \\ b(\tau_2)' \\ \vdots \\ b(\tau_I)' \end{pmatrix}, \qquad B_2^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

このとき，(2.10) 式及び (3.23) 式より，最適投資比率 Φ_{2t}^* は次式で表される．

$$\Phi_{2t}^* = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B_2')^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + (B_2')^{-1}\{a_t^*(X_t) + A_t^*(X_t)X_t\}. \tag{4.5}$$

尚，短期安全証券への最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \Phi_{Pt}^{*i} - \sum_{j=1}^J \Phi_t^{*j}$ である．

4.3 国債指数を対象とする投資戦略

$I = 1$ とし，消費者が残存期間 τ の国債の構成比率密度が $\rho_t(\tau)$ で構成される国債指数を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．すなわち，

$$\int_0^{\bar{\tau}} \rho_t(\tau) d\tau = 1.$$

同国債指数への投資比率を Φ_3^P とする．次のように記法を定める．

$$\Phi_{3t} = \begin{pmatrix} \Phi_{3t}^P \\ \Phi_{3t}^S \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} B_3^P \\ B_3^S \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

ここで，

$$\Phi_{3t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \qquad B_3^P = \int_0^{\bar{\tau}} \rho_t(\tau) b(\tau)' d\tau, \qquad B_3^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

このとき，(2.10) 式及び (3.23) 式より，最適投資比率 Φ_{2t}^* は次式で表される．

$$\Phi_{3t}^* = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B_3')^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + (B_3')^{-1}\{a_t^*(X_t) + A_t^*(X_t)X_t\}. \tag{4.8}$$

尚，短期安全証券への最適投資比率は $1 - \Phi_{Pt}^* - \sum_{j=1}^J \Phi_t^{*j}$ である．

5 今後の課題

本稿では，CRRA 効用消費者の長期証券投資の最適化問題に対し，解析解を導出したが，危険回避度と最適投資比率の関数関係等の興味深い比較静学分析は行っていない．これは，最適投資比率の危険回避度による導関数等が簡潔に表現されないため，CRRA 効用関数及びアフィン潜在ファクター証券市場モデルのパラメータを特定しなければ有意義な結果を導けないからである．

また，家計の模範的アセット・アロケーションの探求の第 2 次接近として，序論で説明した通り，ナイトの不確実性下，曖昧性回避的な相似拡大的頑健効用を有する消費者の長期証券投資の最適化問題を考察している．同問題に対し，バトボルド・菊池・楠田 [3] は，Campbell and Viceira [5] の対数線形近似法を適用して近似解析解を導出している．相似拡大的頑健効用の特殊な場合が CRRA 効用なので，同近似解の近似精度は，CRRA 効用関数及び証券市場モデルのパラメータを特定出来れば，本稿で導出した厳密解との比較により分析出来る．

CRRA 効用関数及びアフィン潜在ファクター証券市場モデルのパラメータの特定は実証分析を必要としているが，一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルのパラメータ推定にはカルマン・フィルター等の計算負荷の小さくない方法を要するため，これらは今後の課題としたい．

参考文献

[1] 有本卓 (1993),『システムと制御の数理』，岩波書店．

[2] バトボルドボロルソフタ，菊池健太郎，楠田浩二 (2018a),「消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解」，Discussion paper J-60，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター．

[3] バトボルドボロルソフタ，菊池健太郎，楠田浩二 (2018b),「相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解」，Discussion paper J-61，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター．

[4] Campbell, J.(1993), "Intertemporal asset pricing without consumption data," *American Economic Review*, Vol.83, 487-512.

[5] Campbell, J. and Viceira, L.(2002), *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, New York.

[6] Duffie, D. and Kan, R.(1996), "A yield-factor model of interest rates," *Mathematical Finance*, Vol.6, 379-406.

[7] Liu, J.(2007), "Portfolio selection in stochastic environments," *Review of Financial Studies*, Vol.20, No.1, 1-39.

[8] P. Maenhout(2004) "Robust portfolio rules and asset pricing," *The Review of Financial Studies*, Vol.17, 951-984.

[9] Mamaysky, H.(2002), "A model for pricing stocks and bonds," Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management.

付録 A　証明

A.1　補題 1 の証明

標準ブラウン運動 B とリスクの市場価格 Λ により，

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \Lambda_s \, ds, \qquad \text{(付録 A.1)}$$

で定義される確率過程 $\tilde{B}_t$ は，Girsanov の定理より，リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である．よって，リスク中立確率測度の下で，潜在ファクターの確率微分方程式は，

$$\begin{aligned} dX_t &= (K(\theta - X_t) - \Sigma\Lambda_t)\ dt + \Sigma\, d\tilde{B}_t \\ &= \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}\ dt + \Sigma\, d\tilde{B}_t, \end{aligned}$$

と表現される．

今，割引国債 P^T を r_t の上に書かれた派生資産と看做すと，r_t は X_t のアフィン関数なので，滑らかな関数 $f(X_t, t)$ により，

$$P_t^T = f(X_t, t), \qquad \text{(付録 A.2)}$$

と表される．このとき，無裁定条件から，f は次の偏微分方程式の解となっていることが示される．

$$f_t + \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}' f_X + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma' f_{XX}] - (r_0 + r' X_t) f = 0, \qquad \text{(付録 A.3)}$$

終端条件：$f(X_T, T) = 1$.

一方，本モデルはアフィン・モデルなので，$\tau = T - t$ とおくと，上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 $b_0(\tau), b(\tau)$ によって

$$f(X_t, t) = e^{b_0(\tau) + b(\tau)' X_t}, \qquad \text{(付録 A.4)}$$

境界条件：$b_0(0) = 0, b(0) = 0$,

と書けることが示される．(付録 A.4) 式に偏微分を施し，(付録 A.3) 式に代入すると，次式を得る．

$$-\frac{db_0(\tau)}{d\tau} - \frac{db(\tau)'}{d\tau} X_t + b(\tau)'\{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} + \frac{1}{2} b'(\tau)\Sigma\Sigma' b(\tau) - (r_0 + r' X_t) = 0. \qquad \text{(付録 A.5)}$$

(付録 A.5) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(付録 A.5) 式を得る．最後に，(付録 A.4) 式を対数微分して P_t^T の確率微分方程式を導出すると，(2.6) 式を得る．

非債券の主要指数を $\tilde{S}_t^j$ と表記する．このとき，Mamaysky [9] より，$\tilde{S}_t^i$ は次式で表され，

$$\tilde{S}_t^j = \exp(b_{j0}t + b_j' X_t). \tag{付録 A.6}$$

配当率過程は次式となる．

$$\frac{D_t^j}{\tilde{S}_t^j} = (d_{j0} + d_j' X_t). \tag{付録 A.7}$$

(付録 A.6)(付録 A.7) 両式より，配当込み指数に関する無裁定条件から，次式を得る．

$$b_{j0} + b_j'\{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} + \frac{1}{2}b_j'\Sigma\Sigma' b_j + (d_{j0} + d_j' X_t) - (r_0 + r' X_t) = 0. \tag{付録 A.8}$$

(付録 A.8) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(2.9) 式を得る．

A.2　補題 2 の証明

満期までの期間 τ の割引国債価格を $P_t(\tau)$ と表記する．短期安全証券，割引国債，主要指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^i))$ とすると，次式が成り立つ．

$$W_t = \vartheta_t P_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) P_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{J} \vartheta_t^i S_t^j.$$

このとき，所与の c の下，自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^i))$ は，次式を満たしている．

$$\begin{aligned} dW_t &= \vartheta_t dP_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) dP_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{J} \vartheta_t^i dS_t^j - c_t dt \\ &= W_t \left\{ \left(1 - \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j \right) \frac{dP_t}{P_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} \right\} - c_t dt. \end{aligned}$$

上式に，(2.5)(2.6)(2.8) 式を代入し，整理すると，(2.11) 式を得る．

A.3　命題 1 の証明

先ず，最適消費は，

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} J_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} \left\{ e^{-\beta t} (W_t^*)^{-\gamma} G^{\gamma} \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \frac{W_t^*}{G}.$$

次に，J に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$J_t = -\beta J + \gamma J \frac{G_t}{G}, \qquad W J_W = (1-\gamma)J, \qquad J_X = \gamma J \frac{G_X}{G},$$

$$W^2 J_{WW} = -\gamma(1-\gamma)J, \qquad W J_{XW} = \gamma(1-\gamma) J \frac{G_X}{G}, \qquad J_{XX} = \gamma J \left\{ (\gamma - 1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\}.$$

間接効用関数 J の偏微分結果より，最適投資 (3.3) 式右辺の分子・分母は次のように表される．

$$\pi_t^* = (\gamma - 1)J \left(\Lambda_t' + \gamma \frac{G_X'}{G} \Sigma \right), \tag{付録 A.9}$$

$$W_t^2 J_{WW} = \gamma(\gamma - 1)J. \tag{付録 A.10}$$

ゆえに，最適投資 (3.3) 式に (付録 A.9)(付録 A.10) 式を代入すると，(3.10) 式を得る．

間接効用関数 J の偏微分方程式 (3.6) における第 2・第 3 項は，(付録 A.9)(付録 A.10) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\Sigma\Sigma' J_{XX}] - \frac{\pi_t^*(\pi_t^*)'}{2W_t^2 J_{WW}} \\ &= \frac{\gamma}{2}J\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G}+\frac{G_{XX}}{G}\right\}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}J\left(\Lambda_t+\gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right)'\left(\Lambda_t+\gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right) \\ &= J\left\{\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\Lambda_t'\Lambda_t - (\gamma-1)\Lambda_t'\Sigma'\frac{G_X}{G}\right\}. \qquad \text{(付録 A.11)}\end{aligned}$$

偏微分方程式 (3.6) における第 6 項は，(3.2) 式を代入し整理すると，

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}c_t^* J_W = \frac{\gamma}{1-\gamma}\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}(1-\gamma)\frac{J}{G} = \gamma\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{J}{G}, \qquad \text{(付録 A.12)}$$

を得る．

(付録 A.11)(付録 A.12) 式等を偏微分方程式 (3.6) に代入し，両辺を γJ で除して整理すると，(3.11) 式が得られる．

A.4　命題 2 の証明

$a_0(\tau)$，$a(\tau)$ がそれぞれ (3.24) 式，(3.25) 式で表されることは容易に確認出来るので，$A(\tau)$ が (3.25) 式で表されることを証明する．

先ず，$A(\tau)$ の転置行列を微分すると，$A(\tau)$ の対称性から次の常微分方程式を得る．

$$\frac{d}{d\tau}A(\tau) = A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - 2A(\tau)\left(K+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0)=0. \quad \text{(付録 A.13)}$$

(3.19) 式と (付録 A.13) 式の両辺を辺々加え，2 で除すると，常微分方程式 (3.19) は次の Riccati 方程式に帰着される．

$$\frac{d}{d\tau}A(\tau) = A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - \left(K+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' A(\tau) - A(\tau)\left(K+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0)=0. \quad \text{(付録 A.14)}$$

ここからは，有本 [1] 定理 5.2 に沿って証明する．$N\times N$ の行列 $C_1(\tau)$，$C_2(\tau)$ に関する線形微分方程式の初期値問題を考察する．

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}K+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda & -\Sigma\Sigma' \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\left(K+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I\\ 0\end{pmatrix}. \quad \text{(付録 A.15)}$$

線形微分方程式 (付録 A.15) の解は (3.27) 式で表される．$C_1(\tau)$ は正則であることが証明出来る[*3]ので，$A(\tau)$ を (3.26) 式で定義する．次の記法を用いる．

$$\tilde{K} = K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda \qquad \text{(付録 A.16)}$$

このとき，

$$\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) = -C_1^{-1}(\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}C_1(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) \qquad \text{(付録 A.17)}$$

[*3] 有本 [1] 定理 5.2 の証明を参照せよ．

となることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}A(\tau) &= \left\{\frac{d}{d\tau}C_2(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) + C_2(\tau)\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) \\
&= \left(-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda C_1(\tau) - \tilde{K}'C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) - A(\tau)\left(\tilde{K}C_1(\tau) - \Sigma\Sigma'C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) \\
&= A(\tau)\Sigma\Sigma'A(\tau) - \tilde{K}'A(\tau) - A(\tau)\tilde{K} - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda,
\end{aligned}
$$

となり，$A(\tau)$ が Riccati 方程式 (付録 A.14) を満たしていることを確認出来る．$A(\tau)$ の一意性は，有本 [1] 定理 5.2 の証明を参照せよ．最後に，$A(\tau)$ の対称性は，Riccati 方程式及び初期値 (付録 A.14) の転値をとったとき，$A(\tau)'$ に関して同一の式が得られるので，解の一意性から $A(\tau)' = A(\tau)$ でなければならないことによる．